ÜNİTE

7

İÇ ÇARPMA İŞLEMİ

İÇİNDEKİLER

- Giriş
- İç Çarpma İşlemi
- Öklid Anlamındaki İç Çarpma
- Norm İşlemi
- Standart Formda Olmayan Vektörlerin Normu
- İki Vektör Arasındaki Açı
- İki Vektör Arasındaki Açının Ölçüsünün Hesabı
- Vektörler İçin Diklik Koşulu
- Schwartz Eşitsizliği
- İzdüşüm Vektörü ve İzdüşümün Uzunluğu
- İç Çarpım İşlemi ile ilgili Uygulama
- Alan Hesaplamaları
- Alıştırmalar
- Değerlendirme Soruları
- Cevap Anahtarı

BU ÜNİTENİN AMAÇLARI

Bu ünitenin amacı, vektörlerce iç çarpma işlemi ile iki vektör arasındaki açıyı ve vektörlerle alan hesaplarını kavratmaktır. Bu amaçla:

- İç çarpma işlemi ve Öklid anlamındaki çarpma işlemi; vektörlerde uzunluk kavramları işlenmiş.
- İki vektör arasındaki açı hesaplanmış.
- Schwartz eşitsizliği, alan hesaplarına ait uygulamalar işlenmiştir.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

Bu dersin anlaşılabilmesi için 6. ünitenin iyi bilinmesi gerekir.

Ayrıca çokgenlerin alan hesaplarının anlaşılabilmesi için ilköğretim 8. sınıf matematik ders kitabında alanlar bölümünün tekrarlanmasında yarar vardır.

Kitabınızdaki örnekleri yazarak çalışmanız, TV programlarını izlemeniz, öğrenmenizi kuvvetlendirecektir.

Kitabınızda bulunan alıştırmaları ve değerlendirme sorularını dikkatlice çözünüz. Yapamadığınız takdirde kitabınızdaki ilgili örnekleri tekrarlayınız. Değerlendirme sorularının cevap anahtarı ile cevaplarınızı karşılaştırınız.

Giriş

Bu ünitede vektörlerde iç çarpma işlemlerini, vektörlerle uzunluk, açı ve alan hesaplamayı öğreneceğiz.

İç Çarpma İşlemi

Düzlemdeki tüm vektörlerin kümesini V ile gösterelim. O zaman

$$V = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \text{ düzlemde bir vektör} \}$$

olarak alıyoruz. Şimdiye kadar V kümesinde toplama işleminin V nin iki vektörünü yine V nin bir elemanına götüren bir işlem olarak gördük. Benzer şekilde iki vektörün farkının, bir vektör ile skaların çarpımının yine V de kaldığını gördük.

Şimdi V den alacağımız iki vektörü bir skalara dönüştürecek şekilde yeni bir işlem tanımlayacağız.

Tanım :

$$< > : \quad V \times V \rightarrow R$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow <\vec{a}, \vec{b}> = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

işlemini aşağıdaki özelikler sağlanacak şekilde tanımlayalım.

1. $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V$ için $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (simetri özeliği)

2. $\forall\ k_1, k_2 \in R$ ve $\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ için $(k_1\,\vec{a} + k_2\,\vec{b}) \cdot \vec{c} = k_1\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) + k_2\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$ (İki lineer özeliği)

3. $\forall \vec{a} \in V$ için $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ dır.

Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{O} \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{O} \end{array}\right\} \text{(Pozitif tanımlılık özeliği)}$$

Bu taktirde <, > işlemine V de bir iç çarpma işlemi veya **skalar çarpma** adı verilir. a b reel sayısına da $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin iç çarpımı veya skalar çarpımı **(nokta çarpımı)** denir.

Bu üç özeliği sağlayan her işlem V de bir **iç çarpma işlemidir.** V de bu üç özeliği sağlayan iç çarpma işlemleri çoktur. Şimdi biz bunlardan Öklid anlamındaki iç çarpmayı ele alacağız.

Öklid Anlamındaki İç Çarpma

Teorem : $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V$ için, $\vec{a} = (a_1, a_2)$. $\vec{b} = (b_1, b_2)$ olmak üzere

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2$$

biçiminde tanımlanan işlem V de bir iç çarpma işlemidir.

Bu işlemin; simetri, iki lineerlik ve pozitif tanımlılık özeliklerini sağladığı gösterilirse teorem ispatlanmış olur.

Tanım :

$$V \times V \to R$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

olarak tanımlanan iç çarpma işlemine **Öklid anlamındaki iç çarpma** ve $\vec{a} . \vec{b}$ değerine de $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin **Öklid iç çarpımı** adı verilir.

Örnek : $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-1, 4)$ vektörlerinin Öklid iç çarpımını bulalım :

$$\begin{aligned} \vec{a} . \vec{b} &= 2 . (-1) + 3 . 4 \\ &= -2 + 12 \\ &= 10 \end{aligned}$$

olur.

Norm İşlemi

$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

iç çarpım işleminde $\vec{b} = \vec{a}$ olması halinde

$$\vec{a} . \vec{a} = a_1^2 + a_2^2$$

olduğunu biliyoruz. Ayırca

$\vec{a} . \vec{a} \geq 0$

olduğundan $\sqrt{\vec{a} . \vec{a}}$ ifadesi her zaman tanımlıdır. Dolayısıyla bu değeri

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} . \vec{a}}$$

ile gösterirsek $\forall \vec{a} \in V$ için $\|\vec{a}\|$ pozitif (veya sıfır) olan bir reel sayıdır. Böylece,

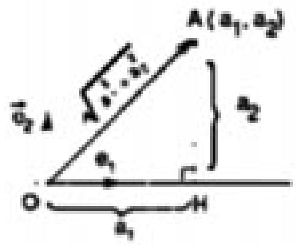
$$\begin{aligned} \| \ \| : V &\to R^+ \\ \vec{a} &\to \|\vec{a}\| \end{aligned}$$

fonksiyonunu (işlemini) tanımlayabiliriz. Bu işleme V de **norm işlemi** denir.

Normun geometrik anlamına bakalım: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ vektörünü ele alalım.

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| &= \sqrt{\vec{a} . \vec{a}} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{(Öklid iç çarpımı)} \end{aligned}$$

olduğundan $\vec{a} = (a_1, a_2)$ noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığını gösterir. Bu da $\vec{a}$ vektörünün boyu demektir.



Eğer $\vec{a} = \vec{O}$ ise normu sıfır olacağından, boyu da sıfır demektir. Bu da bizim daha önce sıfır vektörü için verdiğimiz tanımda yer almış idi.

Örnek : $\vec{a} = (-3, 4)$ için $\|\vec{a}\| = \sqrt{9+16} = 5$ birim dir.

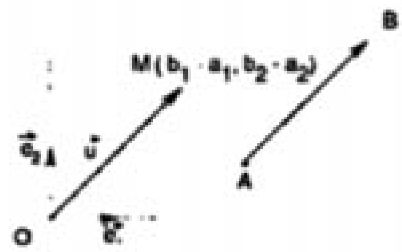
Standart Formda Olmayan Vektörlerin Normu

Uç noktaları A (a_1, a_2) ve B (b_1, b_2) olan bir $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ vektörünü ele alalım.

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ olduğunu biliyoruz. O halde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ nün başlangıç noktasındaki temsilcisi bir M noktasının yer vektörüdür ve bu vektörün boyu

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



olur. Bu değere A ve B noktaları arasındaki **uzaklık** adı verilir. Şu halde: düzlemdeki herhangi iki A ve B noktaları için A ile B arasındaki uzaklık

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

$$= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

dir.

Örnek : A (-2, -5) ve B (10, 0) ise $\overrightarrow{AB}$ vektörünün normunu bulalım.

$$AB = [(10 - (-2), 0 - (-5))]$$
$$= (12, 5)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{12^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{144 + 25}$$
$$= 13 \text{ birim}$$

bulunur.

Norm işlemi özeliklerini bir teorem ile verelim.

Teorem

1. $\forall \vec{a} \in V$ için $\|\vec{a}\| \geq 0$ dır. (Norm, pozitiftir.)

2. $\forall k \in R$ ve $\forall \vec{a} \in V$ için $\|k\vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$

3. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (üçgen eşitsizliği)

4. $\|\vec{a} - \vec{b}\| \geq |\,\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\,|$

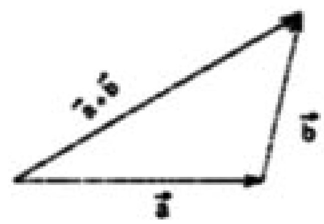
3 ün doğruluğunu gösterelim:

Bir üçgende iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük (veya eşit) olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

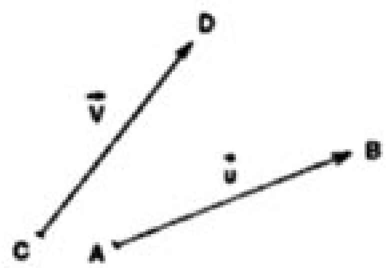
$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

olur.



İki Vektör Arasındaki Açı

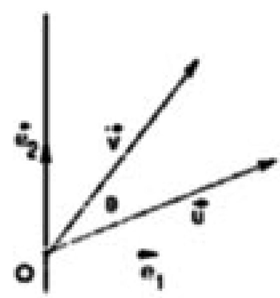
Yandaki şekle göre $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi verilen iki vektörün arasındaki açıyı, bu vektörlerin **konum vektörleri arasındaki açı** olarak tanımlıyoruz. Bu açının ölçüsü θ olduğuna göre, θ bir reel sayıdır ve $0 < \theta \leq \pi$ olarak pozitif yönde ölçülür.



Teorem : $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ ve θ, $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açının ölçüsü olmak üzere

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \theta$$

biçiminde tanımlanan işlem V de bir iç çarpma işlemidir.



Burada teoremin ispatı üzerinde durmayacağız. Bu işlemin; simetri, iki lineerlik ve pozitif tanımlılık özeliklerini sağladığı gösterilerek teorem ispatlanabilir.

İki Vektör Arasındaki Açının Ölçüsünün Hesabı

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ için,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ve yukarıdaki teoremden

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

olduğunu biliyoruz. Sol tarafların eşitliğinden sağ taraflar da eşit olacağından

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta = a_1 b_2 + a_2 b_2$$

veya buradan

$\|\vec{a}\| \neq 0$ ve $\|\vec{b}\| \neq 0$ ise

$$(1) \qquad \cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

bulunur. $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ olduğundan $\vec{a} = (a_1, a_2)$,

$\vec{b} = (b_1, b_2)$ nin bileşenleri cinsinden aralarındaki açının ölçüsünün kosinüsü

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)}}$$

olarak yazılabilir.

Örnek : $\vec{u} = (3, 0)$, $\vec{v} = (3, \ 3\sqrt{3})$ vektörleri arasındaki açıyı bulalım.

$$\cos\theta = \frac{9 + 0}{\sqrt{(3^2 + 0^2) \cdot (3^2 + (3\sqrt{3})^2)}} = \frac{9}{\sqrt{3^2 \cdot (9 + 27)}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{9 \cdot 36}} = \frac{9}{3 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

ve trigonometri cetvellerinden $\theta = \frac{\pi}{3} = 60°$ olduğu görülür.

Vektörler İçin Diklik Koşulu

$\vec{u} \neq \vec{O}$ ve $\vec{v} \neq \vec{O}$ için $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ise $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ **diktir**, denir.

Örnek : $\vec{u} = (3, 0)$, $\vec{v} = (3, 3\sqrt{3})$ vektörlerinin dik olup olmadıklarını araştırınız.

Çözüm :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3\,.\,3 + 0\,.\,3\sqrt{3}$$
$$= 9 \neq 0$$

olduğundan $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ dik değildir.

Örnek 2 : $\vec{u} = (1, 0)$ ve $\vec{v} = (0, 1)$ vektörlerinin arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 1\,.\,0 + 0\,.\,1$$
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0, \ \|\vec{u}\| = 1, \ \|\vec{v}\| = 1$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|}$$
$$= \frac{0}{1\,.\,1}$$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\vec{u} \perp \vec{v}$ dir.

Schwartz Eşitsizliği

Trigonometri derslerinden de hatırlayacağınız gibi $\forall\, \theta \in R$ için $-1 \leq \cos\theta < 1$ veya $|\cos\theta| \leq 1$ dir. (1) ifadesinden

$$\left| \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{b}\|} \right| \leq 1$$

veya buradan da payda daima pozitif olduğundan

$$\left| \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{b}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow |\vec{a}\,.\,\vec{b}| < \|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{b}\|$$

elde edilir. Bu

$$|\vec{a}\,.\,\vec{b}| < \|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{b}\|$$

eşitsizliğine **Schwartz Eşitsizliği** denir.

Örnek :

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| < \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

olduğunu gösterelim:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b})\,.\,(\vec{a} + \vec{b})$$
$$= \vec{a}\,.\,\vec{a} + \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{b}\,.\,\vec{a} + \vec{b}\,.\,\vec{b} \qquad (\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,a \text{ olduğundan})$$
$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\,\vec{a}\,.\,\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \qquad (|\vec{a}\,.\,\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,.\,\|\vec{b}\| \text{ Schwartz eşitsizliğinden})$$

$$\leq \ \|\vec{a}\|^2 + 2 \, . \, \|\vec{a}\| \, . \, \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq \ (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

ve her iki tarafın karekökü alınırsa,

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \ \leq \ \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

elde edilir.

İzdüşüm Vektörü ve İzdüşüm Uzunluğu

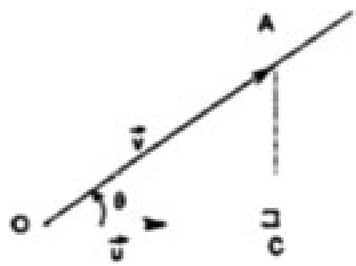
Ön bilgi :

I) Birim vektör : $\|\vec{u}\| = 1$ (birim) ise $\vec{u}$ vektörüne bir **birim vektör** denir.

II) Bir $\vec{v}$ vektörünün bir $\vec{u}$ **birim vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu :**

Yandaki şekli inceleyiniz.

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı θ olsun.



$$\cos\theta = \frac{\|\overrightarrow{OC}\|}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \|\overrightarrow{OC}\| = \|\vec{v}\| \, . \cos\theta$$

dır. Diğer taraftan

$$|OC| = \vec{u} . \vec{v}$$

dır. Gerçekten

$$\vec{u} . \vec{v} \ = \ \|\vec{u}\| \, . \, \|\vec{v}\| \, . \cos\theta$$

$$= \ 1 . \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} . \vec{v} \ = \ |OC|$$

olur.

$$\|\vec{u}\| \neq 1 \text{ ise } \vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| \, . \, \underbrace{\|\vec{v}\| . \cos\theta}_{|OC|}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \qquad \text{(OC izdüşüm vektörü)}$$

olur.

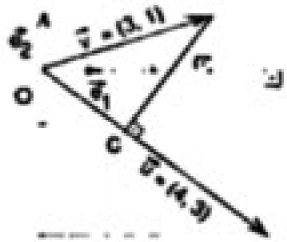
Örnek : $\vec{u} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{v} = 3\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ vektörleri veriliyor. $\vec{v}$ nin $\vec{u}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğunu bulalım.

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8 - 3}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$= \frac{5}{5} = 1 \quad \text{birim}$$

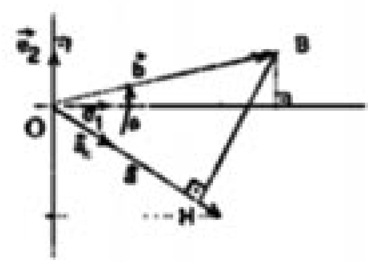
olur. $\overrightarrow{OC}$ vektörünün izdüşüm vektörü ve $\|\overrightarrow{OC}\|$ değerine de izdüşüm vektörünün uzunluğu (izdüşümün uzunluğu) denir.



bulunur.

Örnek : $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (4, 1)$ vektörleri veriliyor. $\vec{b}$ nün $\vec{a}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümü olan vektörü bulalım.

Yandaki şekle göre $\vec{a}_0$ ile $\vec{a}$ yönündeki birim vektörü gösterirsek,



$$\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \cdot (3, -2) = \frac{1}{\sqrt{13}} (3, -2)$$

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}} \right)$$

(1) $\quad \overrightarrow{OH} = k \cdot \vec{a}_0 \qquad (k \in R)$

dır. Burada $k = \|\overrightarrow{OH}\|$

veya OHB dik üçgeninden $\quad \cos\theta = \dfrac{\|\overrightarrow{OH}\|}{\|\overrightarrow{OB}\|}$

$$k = \|OH\| = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos\theta$$

$$= \|\overrightarrow{OB}\| \cdot 1 \cdot \cos\theta$$

veya $1 = \|\vec{a}_0\|$ olduğundan

$$k = \|\overrightarrow{OB}\| . \|\overrightarrow{a_0}\| . \cos\theta$$

$$= \overrightarrow{OB} . \overrightarrow{a_0}$$

$$= (4, 1) . \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$k = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

O halde (1) den, $\vec{b}$ vektörünün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşümü olan vektör

$$\overrightarrow{OH} = k . \overrightarrow{a_0}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{13}} . \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{30}{\sqrt{13}}, \frac{-20}{\sqrt{13}}\right)$$

olur.

İç Çarpma İşlemi İle İlgili Uygulama

1. $\vec{a} = (-1, 3), \vec{b} = (4, 9)$ ise bu vektörlerin iç çarpımını bulalım:

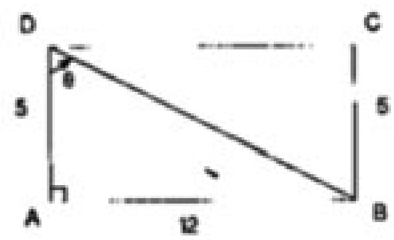
$$\vec{a} . \vec{b} = -1 . 4 + 3 . 9$$

$$= 23 .$$

2. Şekildeki dikdörtgende;

$|\overrightarrow{AB}| = 12$ ve $|\overrightarrow{BC}| = 5$ dır.

$\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DB}$ iç çarpımını bulalım.



DAB dik üçgen olduğundan Pisagor bağıntısı yazılarak,

$$|DB|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$

$$= 12^2 + 5^2$$

$$= 144 + 25$$

$$= 169$$

$$|DB| = 13$$

bulunur.

$$\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DB} = \|\overrightarrow{DA}\| . \|\overrightarrow{DB}\| . \cos\theta$$

ve buradan

$$\cos\theta = \frac{5}{13}$$

bulunur. *(Nedenini daha iyi anlamanız için ilköğretim 8. sınıf matematik kitabı, MEB. yayınına bakınız)* yerlerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DB} = 5 \; . \; 13 . \frac{5}{13}$$

$$= 25$$

olur.

3. $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 4\sqrt{3}$. $\|\vec{a}\| = 2$ ve $\|\vec{b}\| = 4$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı kaç derecedir?

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{a}\|\;.\;\|\vec{b}\|}$$

olduğundan, değerler yerlerine yazılırsa,

$$\cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{2\,.\,4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

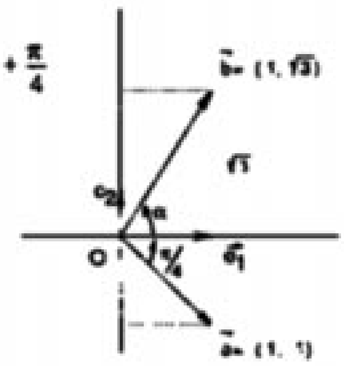
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ veya } \theta = 30° \text{ dir.}$$

4. $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ vektörleri veriliyor. Bu vektörlerin boylarını ve aralarındaki açıyı hesaplayalım :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Yandaki şekle göre $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı $\theta = \alpha + \frac{\pi}{4}$ dır. Burada



$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

dır. O halde,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = 45 + 60 \Rightarrow \theta = 105°$$

5. $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 5$. $\vec{a} - \vec{b} = (2, -1)$ ise $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ kaçtır?

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\,(\vec{a} - \vec{b})$$

$$2^2 + (-1)^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

$$5 = \|\vec{a}\|^2 - 2\,.\,\vec{a}\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \qquad (1)$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

$$25 = \|\vec{a}\|^2 + 2\,\vec{a}\,.\,\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \qquad (2)$$

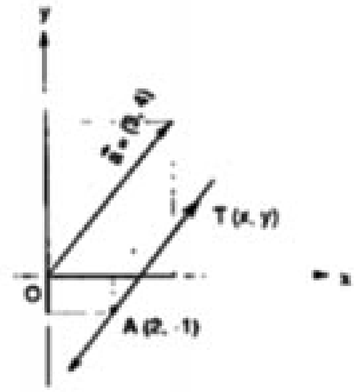
(2) den (1) çıkarılırsa,

$$25 = \|\vec{a}\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$
$$\mp 5 = \mp \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a}\cdot\vec{b} \mp \|\vec{b}\|^2$$
$$\overline{20 = 4\vec{a}\cdot\vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = 5}$$

bulunur.

6. A (2, -1) noktasından geçen ve $\vec{a} = (3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulalım :

Yandaki şekilde görüldüğü gibi, A noktasından geçen ve $\vec{a}$ vektörüne paralel olan doğrunun herhangi bir temsilci noktası T (x, y) olsun. $k \in IR$ olmak üzere $\vec{AT} = k\,\vec{a}$ (doğrunun vektörel denklemi) olmalıdır. O halde.



$$(x - 2, y + 1) = k\,(3, 4)$$

yazılır. İki vektörün eşitliği tanımından

$$x - 2 = 3k \text{ ve } y + 1 = 4k$$

$$k = \frac{x-2}{3} \quad \text{ve} \quad \frac{y+1}{4} = k \quad \text{(doğrunun parametrik denklemi)}$$

veya buradan

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$
$$4x - 8 = 3y + 3$$
$$3y - 4x + 11 = 0 \qquad \text{(doğrunun aranan denklemi)}$$

bulunur.

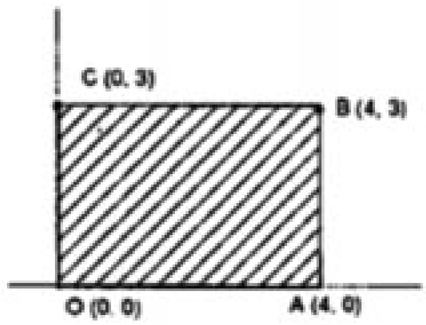
II. yol : Denklemi aranan doğru $\vec{a} = (3, 4)$ vektörüne paralel olacağından eğimi, vektörün eğimine eşittir. O halde doğrunun eğimi $m = \frac{4}{3}$ dır. Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi : Doğrunun bir noktası A (2, -1) olduğundan

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - (-1) = \frac{4}{3}\,(x - 2)$$
$$y + 1 = \frac{4}{3}\,(x - 2)$$
$$3y + 3 = 4x - 8$$
$$\boxed{3y - 4x + 11 = 0}$$

bulunur.

Alan Hesaplamaları

Örnek 1 :



$A(OABC) = 4 \,.\, 3$

$= 12 \text{ br}^2$ olduğunu biliyoruz.

$\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OC} = (4, 0) \,.\, (0, 3)$

$= 0$ olduğundan dörtgenimiz bir dikdörtgendir.

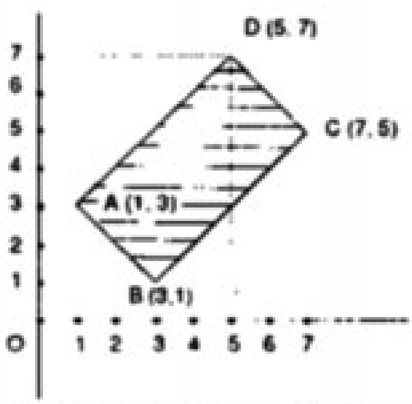
Dolayısıyla $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ yükseklik ve $\|\overrightarrow{OA}\|$ taban alınabilir.

$A(OABC) = \|\overrightarrow{OA}\| \,.\, \|\overrightarrow{AB}\|$

$= 4 \,.\, 3$

$= 12$ birim

Örnek 2 : Aşağıdaki şekle göre :



$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - 3)$

$\overrightarrow{AB} = (2, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (7\text{-}3, 5\text{-}1)$

$\overrightarrow{BC} = (4, 4)$

$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC} = (2, -2) \,.\, (4, 4)$

$= 8 + (-8)$

$= 0$

olduğundan dörtgenimiz bir dikdörtgendir. Dolayısıyla

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ birim,}$$

$$\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(7-5)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ birim,}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(7-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{32} \text{ birim}$$

$\|AB\| = \|DC\|$ yükseklik, $\|BC\| = \|AD\|$ taban olarak alınabilir.

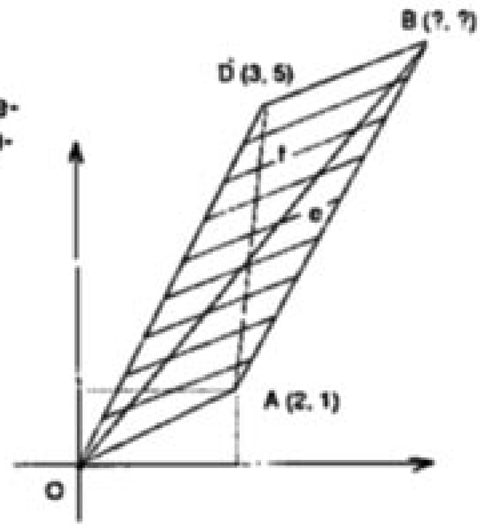
$$A(ABCD) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$= \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{256}$$

$A(ABCD) =$ 16 birim^2 bulunur.

Örnek 3 :

(OABD) bir paralelkenar olacak şekilde B noktasını yandaki şekle göre bulunuz ve A (OABD) = ?



Çözüm :

B (x_0, y_0) diyelim.

$$\frac{y_0 - 1}{x_0 - 2} = \frac{5-0}{3-0} \Rightarrow \frac{y_0 - 1}{x_0 - 2} = \frac{5}{3}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OD}\|^2$$

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 3^2 + 5^2$$

$x_0 - 2 = \frac{3}{5}(y_0 - 1)$ değerinin yerine konulması ile

$$\frac{34}{25}(y_0 - 1)^2 = 34$$

veya

$$(y_0 - 1)^2 = 25 \Rightarrow y_0 - 1 = +5$$

$\Rightarrow y_0 = 6$ (I. Bölgede olduğundan)

$3(y_0 - 1) = 5(x_0 - 2)$

$3(6 - 1) = 5(x_0 - 2)$

$15 = 5(x_0 - 2) \Rightarrow 3 = x_0 - 2$

$\Rightarrow x_0 = 5 \rightarrow B(5, 6)$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{OA}\| . \|\overrightarrow{OD}\| . \cos\theta$

$(2, 1) . (3, 5) = \sqrt{5} . \sqrt{34} \cos\theta$

$6 + 5 = \sqrt{170} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{11}{\sqrt{170}} = \dfrac{11\sqrt{170}}{170}$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \dfrac{121}{170} = \dfrac{170 - 121}{170}$

$\sin^2\theta = \dfrac{49}{170} \rightarrow \sin\theta = \dfrac{7}{\sqrt{170}}$

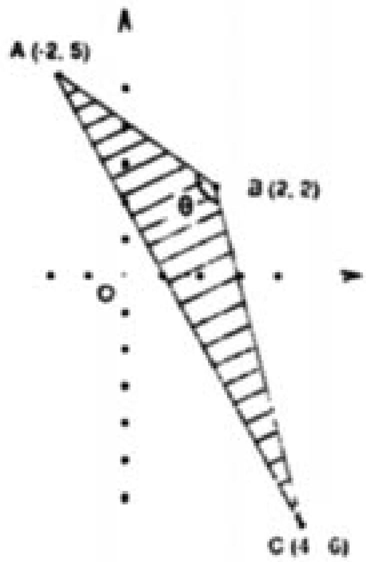
$A(OABD) = \|\overrightarrow{OA}\| . \|\overrightarrow{OD}\| . \sin\theta$

$= \sqrt{5} . \sqrt{34} . \dfrac{7}{\sqrt{170}}$

$A(OABD) = 7$ br^2 bulunur. Eğer dörtgen bir eşkenar dörtgen veya deltoid ise idi alan $\dfrac{e.f}{2}$ formülüyle bulunurdu.

Örnek 4 :

$\left.\begin{array}{l} A(-2, 5) \\ B(2, 2) \\ C(4, -6) \end{array}\right\} \Rightarrow A(ABC) = ?$



$\overrightarrow{AB} = (4, -3)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -8)$

$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{16 + 9} = 5$ birim

$\| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$ birim

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{BC}\| . \cos\theta$

$(4, -3) . (2, -8) = 5 . \sqrt{68} . \cos\theta$

$8 + 24 = 5 . \sqrt{68} \cos\theta \Rightarrow 32 = 5\sqrt{68} \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{32}{5\sqrt{68}}$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{32}{5\sqrt{68}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1024}{25.68}$

$\sin^2\theta = \dfrac{1700 - 1024}{1700} = \dfrac{676}{1700}$

$\sin\theta = \dfrac{26}{10\sqrt{17}} = \dfrac{13}{5\sqrt{17}}$

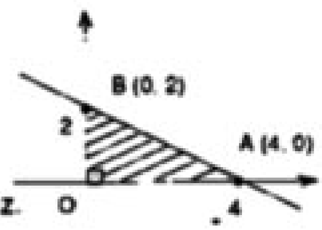
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \| . \| \overrightarrow{BC} \| \sin\theta$

$= \dfrac{1}{2} . 5 . \sqrt{68} . \dfrac{13}{5\sqrt{17}} = \dfrac{1}{2} . 5 . 2\sqrt{17} . \dfrac{13}{5\sqrt{17}}$

$A(\widehat{ABC}) = 13$ birim^2 bulunur.

Örnek 5 :

Yandaki dik üçgenin alanını hesaplayalım.



$A(\widehat{OAB}) = \dfrac{1}{2} 4 . 2 = 4$ birim^2 olduğunu biliyoruz.

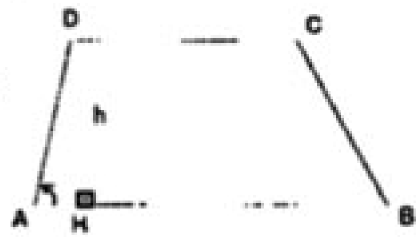
$A(\widehat{OAB}) = \dfrac{1}{2} \| \overrightarrow{OA} \| . \| \overrightarrow{OB} \| . \sin 90°$

$= \dfrac{1}{2} 4 . 2 . 1 = 4$ birim^2

$A(\widehat{OAB}) = 4$ birim^2 bulunur.

Örnek 6 : Yamuğun alanını hesaplayalım.

$h = \| \overrightarrow{AD} \| . \sin \hat{A}$



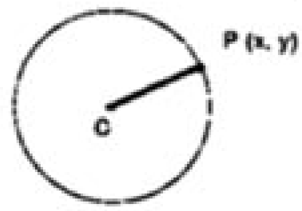
$A(ABCD) = \frac{(\| \overrightarrow{AB} \| + \| \overrightarrow{BC} \|)}{2} . \| \overrightarrow{AD} \| . \sin \hat{A}$

formülünden bulunur.

Örnek 7 : Çemberin denklemi :

C (3, 5) ve r = 7 verilsin.

$\| \overrightarrow{CP} \| = r$ dır.



Gerçekten,

$\overrightarrow{CP} = (x - 3, y - 5)$

$\| \overrightarrow{CP} \| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = 7$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 49$

$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$

bulunur.

Örnek 8 : A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

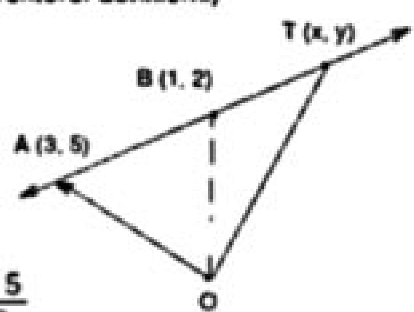
$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{AB})$ (doğrunun vektörel denklemi)

Gerçekten

$(x, y) = (3, 5) + t(1-3, 2-5)$

$(x, y) = (3, 5) + t(-2, -3)$

$(x, y) = (3 - 2t, 5 - 3t)$



$\left. \begin{array}{l} x - 3 = -2t \Rightarrow x = 3 - 2t \\ y - 5 = -3t \rightarrow y = 5 - 3t \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{x-3}{-2} = \frac{y-5}{-3}$

(doğrunun parametrik denklemi).

Buradan, doğrunun T(x,y) noktasının koordinatlarına göre denklemi

$-3x + 9 = -2y + 10$

$-3x + 2y - 1 = 0.$

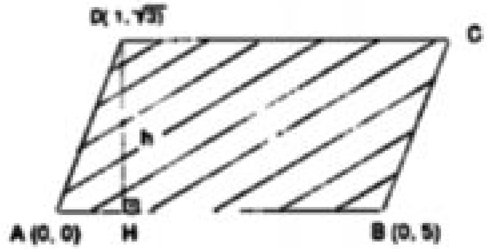
olur.

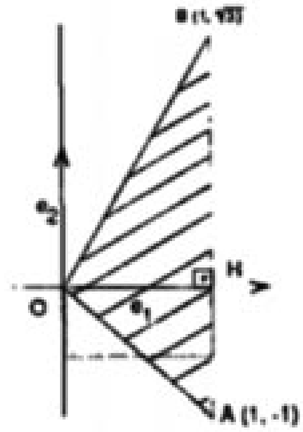
Örnek. 9 Yandaki paralelkenarın alanını bulalım.

$$S = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot h$$

$$= 5 \cdot \sqrt{3} \quad \text{birim}^2$$

bulunur.





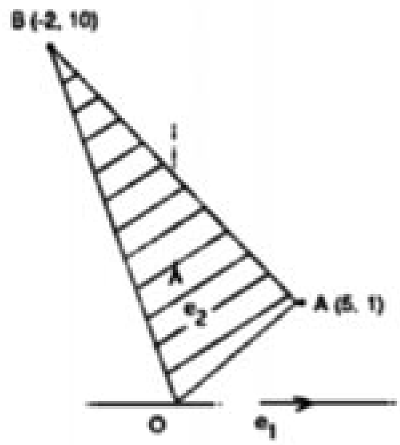
Örnek 10 : Yandaki şekilde görülen OAB üçgeninin alanını hesaplayalım.

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{OH}\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \quad \text{birim}^2$$

dır.



Örnek 11 : Yandaki şekilde görülen OAB üçgeninin alanını hesaplayalım.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2 . 5 + 1 . 10$$

$$= 0$$

olduğundan üçgen bir dik üçgendir. Dolayısıyla

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 10^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{4 . 26}$$

$$= 26 \text{ birim}^2$$

bulunur.

Örnek 12 : Köşeleri; O (0, 0), A (2, -3), B (4, 0) ve C (2, 3) olan eşkenar dörtgenin alanını bulalım.

Çözüm :

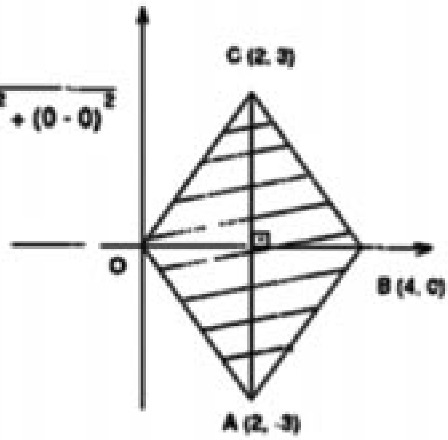
$$S = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \| . \| \overrightarrow{OB} \|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(2-2)^2 + (3+3)^2} . \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ 6 . 4$$

$$= 12 \text{ birim}^2$$

bulunur.



Örnek 13 : Köşeleri; A (0, -1), B (2, -3) C (4, -1) ve D (2, 4) olan deltoidin alanını bulalım.

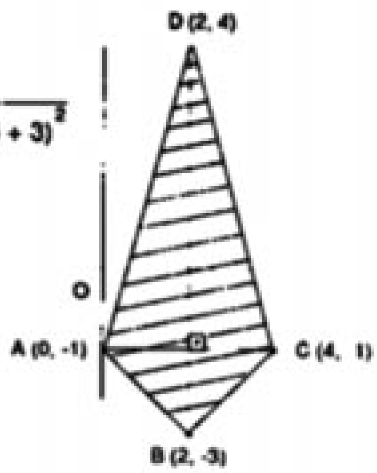
$$S = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AC} \| . \| \overrightarrow{BD} \|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(4-0)^2 + (-1+1)^2} . \sqrt{(2-2)^2 + (4+3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ 4 . 7$$

$$= 14 \text{ birim}^2$$

bulunur.



Siz de köşeleri; A (-2, -1), B (4, -1), C (2, 2) ve D (-1, 2) olan yamuğun alanını bulunuz.

ÖZET

İç çarpma, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{v} = (x_2, y_2)$ olmak üzere

$<\vec{u}, \vec{v}> = x_1 \ x_2 + y_1 y_2$

biçiminde tanımlanan işleme $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nin Öklid anlamındaki **iç çarpma** işlemi ve $\vec{u}.\vec{v}$ değerine de $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nin Öklid iç çarpımı denir.

Açı, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vektörlerinin arasındaki açı,

$<\vec{u}, \vec{v}> = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos\theta$ bağıntısından

$$\cos\theta = \frac{<\vec{u}, \vec{v}>}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

dır.

Diklik Koşulu, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ nin dikliği şartı,

$$<\vec{u}, \vec{v}> = 0 \qquad \text{ve } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ ve } \vec{v} \neq \vec{0}$$

dır.

Schwartz Eşitsizliği, $|\cos\theta| \leq 1$ olduğu yukarıdaki açı ifadesinde yerine yazılarak,

$$|<\vec{u}, \vec{v}>| \leq \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$$

elde edilir, bu eşitsizliğe Schwartz eşitsizliği denir.

Dik izdüşüm, bir $\vec{u}$ vektörünün bir $\vec{v}$ birim vektörü üzerindeki dik izdüşümü $<\vec{u}, \vec{v}>$ dır. $\vec{v}$ birim değil ise bu dik izdüşümün uzunluğu

$\dfrac{<\vec{u}, \vec{v}>}{\|\vec{u}\|}$ olur.

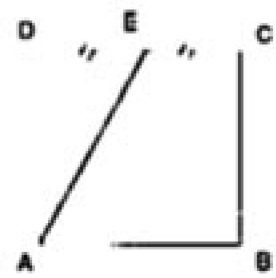
Açı ve uzunluk sayesinde alan hesapları verildi.

ALIŞTIRMALAR

1. Merkezi (3, -2) ve yarıçap uzunluğu $r = 4$ olan çemberin denklemini vektörlerle yazınız.
2. Köşelerinin koordinatları A (0, -2) , B (4, 0) ve C (1, 6) olan üçgenin alanını bulunuz.
3. Köşelerinin koordinatları A (8, 6), B (9, 12), C (-1, 8) ve D (-2, 2) olan paralelkenarın alanını bulunuz.
4. Köşeleri O (0, 0), B (3, -3) C (0, -6) ve D (-3, -3) olan eşkenar dörtgenin alanını bulunuz.
5. Köşeleri A (0, 5), B (-2, 5), C (-2, 0) ve D (0, 0) olan diktörtgenin alanını bulunuz.
6. A (-2, 1) noktasından geçen ve $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ vektörüne dik olan doğunun denklemini yazınız.
7. Köşelerinin koordinatları A (2, 10), B (-5, 1) ve C (0, 0) olan üçgenin dik üçgen olup olmadığını gösteriniz ve alanını hesaplayınız.

DEĞERLENDİRME SORULARI VII

1. Şekildeki ABCD dörtgeni bir karedir. $|AB| = 6$ birim, $|DE| = |EC|$ olduğuna göre $\vec{AE} \cdot \vec{AB}$ iç çarpımı hangisidir?

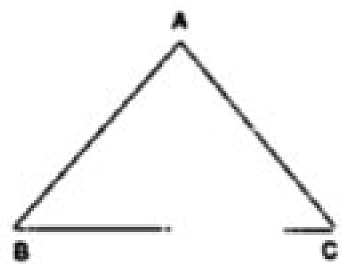


A) -18 B) 18

C) $9\sqrt{5}$ D) 36

E) $30\sqrt{5}$

2. Şekildeki ABC eşkenar üçgeninde $|BC| = 4$ ise $\vec{CA} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$ iç çarpımı hangisidir?



A) -16 B) -8 C) 8 D) 12 E) 16

3. $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (3, 4)$ ve $\vec{c} = (-1, -3)$ ise $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ hangisidir?

A) -17 B) -13 D) -1 D) 17 E) 18

4. $\vec{a} = (-1, 0)$, $\vec{b} = (-4, 1)$ ise $|2\vec{a} \cdot \vec{b}|$ hangisidir?

A) -8 B) -5 C) 5 D) 6 E) 8

5. $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2$ vektörünün boyu hangisidir?

A) -13 B) 5 C) 7 D) 13 E) 17

6. $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ ve $\vec{b} = k\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ vektörlerinin dik olması için k ne olmalıdır?

A) -6 B) -3 C) $\frac{3}{2}$ D) 3 E) 6

7. $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0)$ vektörleri arasındaki açı hangisidir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

8. A (2, 1), B (4, 5) ve C (3, k) noktaları veriliyor. $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ ise k ne olmalıdır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

9. $\vec{a} - 3\vec{b} = (2, 3)$, $2\vec{a} + \vec{b} = (4, -1)$ olduğuna göre $\vec{a}$ hangisidir?

A) (-2, 0) B) (-1, 1) C) (-1, 0)

D) (2, 0) E) (2, 1)

10. A (3, -5), B (3, 2) noktalarını çap kabul eden çemberin yarıçapı hangisidir?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

11. A (1, 0) noktasından geçen ve $\vec{a} = (2, 3)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi hangisidir?

A) $-2y - 3x + 3 = 0$ B) $-2y + 3x + 3 = 0$

C) $2y - 3x + 3 = 0$ D) $2y - 3x - 3 = 0$

E) $2y - 3x = 0$

12. Köşeleri A (2, 0), B (3, 1) ve C (2, 1) olan ABC üçgenin $\hat{A}$ nın ölçüsü hangisidir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

13. $\vec{a} = (3, k)$, $\vec{b} = (2, 3)$ ve $\vec{a} \perp \vec{b}$ ise k nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) - 1 C) -2 D) -3 E) -4

14. $\vec{a} = 6\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ vektörü aşağıdakilerden hangisine diktir?

A) $-3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ B) $-2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ C) $-\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

D) $2\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$ E) $\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{4}\vec{e}_2$

15. $\vec{a} = (2, -\sqrt{2})$, $\vec{b} = (1, \sqrt{2})$ vektörleri arasındaki açı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

16. Aşağıdaki vektör çiftlerinden hangi iki vektör birbirine diktir?

A) $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ve $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ B) $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ve $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

C) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ve $2\vec{e}_1$ D) $3\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

E) $3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ve $\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$

17. $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (3, \sqrt{7})$ vektörleri arasındaki açının tanjantı hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

18. Boyu 3 birim olan ve $\vec{e}_1$ vektörü ile $\frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan vektörlerden biri hangisidir?

A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B) $\frac{1}{2}(3, 3\sqrt{2})$ C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ E) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

19. $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$ ve $\theta = 60°$ ise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) $6\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

20. Köşe noktaları O (0, 0), A (5, 0) ve B (0, 2) olan üçgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

KAYNAKÇA

1. Analitik geometri kitapları.
2. Liseler için Analitik geometri I. M.E. B. yayınları
3. İlköğretim 8. sınıf matematik ders kitabı M. E. B yayınları.