ÜNİTE 6

DÜZLEMDE VEKTÖRLER

İÇİNDEKİLER

BU ÜNİTENİN AMAÇLARI VE İÇERİĞİ

Bu dersin amacı, düzlemde vektör kavramını tanıtmak ve vektörlerle düzlem analitik geometri yapmaktır. Bu amaçla,

- Yönlü doğru parçası kavramı verilmiş,
- Yönlü doğru parçaları arasında eşlik bağıntısına göre denklik sınıfları vektörler olarak tanımlanmış,
- Vektörlerde eşitlik ve toplama işlemleri tanımlanmış,
- Sıfır vektörü ve fark vektörü belirtilmiş,
- Bir sayı ile bir vektörün çarpımı tanımlanmış,
- Düzlemde vektörlerin sayılarla ifade edilmesi maksadı ile nokta–vektör eşlemesi yapılmış,
- Düzlemde dik çatı inşa edilerek vektörlerin, bu çatıya göre bileşenleri birer sıralı gerçek sayı ikilisi olarak verilmiş,
- Bileşenleri cinsinden vektörlerin toplamı, farkı, bir sayı ile çarpımı, paralelliği, iç çarpımı ve dikliği tanımlanmıştır.

NASIL ÇALIŞMALI?

Bu ünitenin anlaşılabilmesi için analitik düzlemin iyi bilinmesi gerekir. Bunun için bu dersten önceki dersleri iyi öğrenmiş olmalısınız. Yönlü doğru parçaları ile temsil edilen vektörlere ait işlemleri, bileşenleri cinsinden yaparken tıpkı noktaların bileşenlerini (koordinatlarını) kullandığınız gibi vektörlerin bileşenlerini de kullanabileceğinize dikkat ediniz.

- Derslerin TVden verildiği saatleri tesbit edin. Mümkünse elinizde kalem–kâğıt olduğu halde TVdeki dersleri izleyin.
- Bu derste verilen örnekleri kitaba bakmadan bizzat çözün. Alıştırma ve test sorularını cevaplandırdıktan sonra kitabın sonundaki cevaplarla kendi çalışmanızı karşılaştırınız.
- Örneklere benzer örnekler hazırlayıp cevaplandırınız. Bu derste verilen teoremlerin ispatlarını liseler için Analitik Geometri I kitabında bulabilirsiniz.

Giriş

Bu ünitede vektör kavramını yönlü doğru parçaları cinsinden vereceğiz. Bunun için yönlü doğru parçasını tanımladıktan sonra yönlü doğru parçalarının eşliği denen bir bağıntıyı yönlü doğru parçaları arasında tanımlayacağız. Bu bağıntıya göre her bir yönlü doğru parçasının **denklik sınıfını** bir **vektör** olarak tanımlamış olacağız.

Sonra da vektörleri analitik olarak ele alacağız. Bu demektir ki düzlemdeki vektörlere de sıralı reel sayı ikililerini karşılık tutacağız. Böylece vektörler arasındaki, toplama, çıkarma, skalar ile çarpma işlemlerini sayılar ile yapacağız.

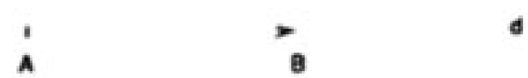
Yönlü Doğru Parçası

Uç noktaları A ve B olan bir doğru parçasını [AB] ile gösteriyoruz. Bu doğru parçası üzerinde bir yön tespit edelim. Yönümüz A dan B ye veya B den A ya olabilir. Eğer yönümüz A dan B ye ise A noktasına **başlangıç** noktası, B noktasına da **bitim** noktası denir. Böylece ortaya çıkan [AB] doğru parçası yerine **yönlü doğru parçası** diyeceğiz ve bunu $\overrightarrow{AB}$ ile göstereceğiz. Buna göre $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğru parçasının da başlangıç noktası B, bitim noktası A olduğunu söyleyebiliriz. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ için ortak olan, [AB] doğru parçası bu iki yönlü doğru parçası için ortak olan **doğrultu** olarak alınacaktır. Aşağıdaki şekli inceleyiniz. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ nın zıt yönlü doğru parçaları olduğunu gördünüz mü?

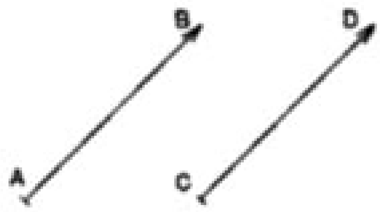
Yönlü doğru parçasının uzunluğu (boyu) diye A ve B noktaları arasındaki

uzaklığa, bir diğer ifadeyle [AB] nın uzunluğuna denir ve $|AB|$ ile gösterilir.

$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının taşıyıcısı, bu doğru parçasının üzerinde bulunduğu ve A ile B noktalarının belirttiği doğruya denir. Şu halde $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğru parçalarının taşıyıcı doğruları ortaktır. Aşağıdaki şekli inceleyiniz d nin taşıyıcı doğru olduğunu gördünüz mü?



İki yönlü doğru parçasının taşıyıcı doğruları, aynı veya paralel, boyları eşit ve yönleri aynı ise, bu iki yönlü doğru parçasına, **eştir** denir. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ eş ise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ biçiminde yazılır. Buna göre,



$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı doğrultulu, aynı yönlü ve $|AB| = |CD|$ demektir.

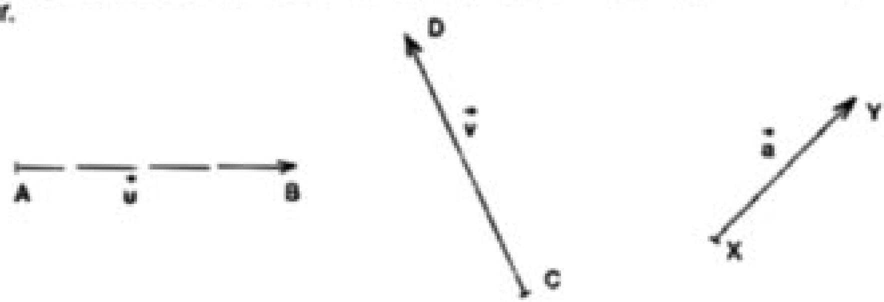
Buna göre her doğru parçasının kendisine eş olduğunu söyleyebiliriz. O halde yönlü doğru parçaları için eşlik bağıntısı yansıyandır.

$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ eş ise $\overrightarrow{CD}$ ile $\overrightarrow{AB}$ nin de eş olduğunu söyleyebiliriz (Simetri özeliği). Ayrıca $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ ise $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ olduğunu ifade edebiliriz (Geçişme özeliği). Öyle ise yönlü doğru parçaları arasında eşlik bağıntısı bir **denklik bağıntısıdır.** $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına eş olan bütün yönlü doğru parçalarının kümesini,

$$[AB] = \{ \overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} \}$$

ile gösterirsek, bunun bir **denklik sınıfı** olduğu açıktır. Bu denklik sınıfına, $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası tarafından temsil edilen **vektör** adı verilir.

Vektörleri denklik sınıfları olarak tanımladığımıza göre, bir vektörü göstermek için denklik sınıfına ait yönlü doğru parçalarından herhangi birini seçebiliriz. Çoğu zaman, vektörleri bir tek küçük harf ile de göstermek âdettir. Ancak bu küçük harfin üzerine vektör işareti (→) koyulur veya koyu renkli küçük harf yazılır.



Sıfır Vektörü

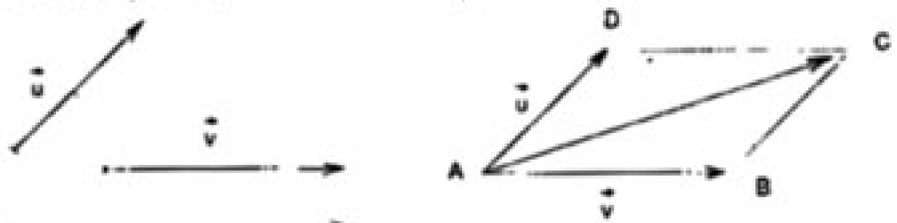
Başlangıç ve bitim noktası aynı olan bir yönlü doğru parçasının, yalnız boyu bellidir ve boyu sıfırdır. Fakat doğrultusu ve yönü tanımlı değildir. Bu tür yönlü doğru parçalarının temsil ettiği vektöre, **sıfır vektörü** denir. O halde $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ..., nin temsil ettikleri vektör, sıfır vektörüdür. Sıfır vektörünü kısaca $\vec{0}$ ile göstereceğiz.

Vektörlerde Eşitlik

İki vektörün temsilcileri olan yönlü doğru parçaları eş iseler bu iki vektöre **eşittir** denir. Bu tanıma göre eşit iki vektörün, aynı denklik sınıfına karşılık geldiğini söyleyebiliriz. Yönlü doğru parçalarının eşlik bağıntısına göre denklik sınıfları birer vektör olmak üzere aynı denklik sınıfı ile tanımlanan iki vektör eşittir. Tersine, iki vektör eşitse denklik sınıfları aynıdır. ***Uyarı : Yönlü doğru parçası olarak $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{XY}$ ise, vektör olarak $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{XY}$ olduğunu unutmayınız.***

Vektörlerde Toplama

Vektörlerde toplama işlemi **paralelkenar kuralı** adı verilen pratik bir yöntemle tanımlanır : $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi farklı iki vektör verilmiş olsun. Düzlemde bir A noktası tespit edilir ve vektörlerin temsilcilerinin başlangıç noktaları aynı bir A noktasında olacak şekilde, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ olarak çizilir.



$\overrightarrow{AB}$ ye D noktasından ve $\overrightarrow{AD}$ ye B noktasından çizilen eş yönlü doğru parçaları ile ABCD paralelkenarı elde edilir. Bu paralelkenarın AC köşegeninden oluşan yönlü doğru parçası $\vec{u} + \vec{v}$ toplam vektörünü temsil eder. Yani

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

veya

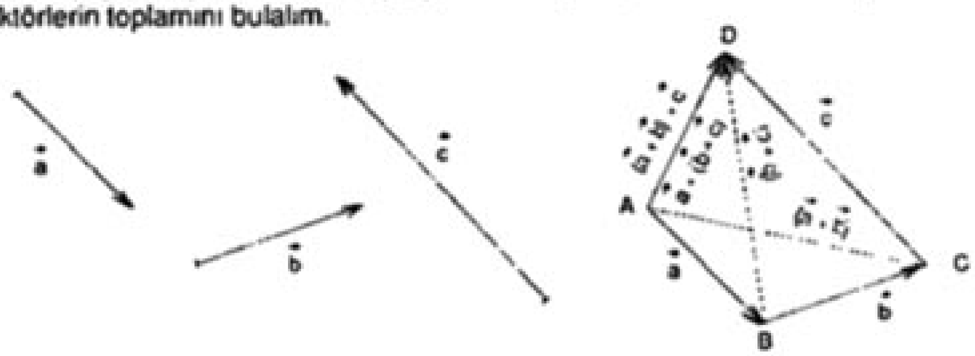
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

dir.

Buradan toplama işleminin aşağıdaki özeliklerini görebiliriz : Paralelkenar kuralı ile tanımlanan **toplama işlemi, bize iki vektörden, üçüncü bir vektör verir**. Şu halde :

1. Vektörler kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi farklı üç $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörü verilmiş olsun. Bu vektörlerin toplamını bulalım.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}\\ \vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD}=\vec{AD} \text{ (taraf tarafa topladık)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{BD}\\ \vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD})=\vec{AD}$$

dır. Şu halde herhangi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri için

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

yazabiliriz. O halde :

> ***2. Vektörlerde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.***

Paralelkenar kuralını uygulayarak $\forall$ A, B nokta çifti için

$$\vec{AA}+\vec{AB}=\vec{AB}$$

ve

$$\vec{AB}+\vec{BB}=\vec{AB}$$

yazabiliriz. $\vec{AA}$ ve $\vec{BB}$ vektörleri, sıfır vektörünün, temsilcileri olduğuna göre $\vec{AB}$ de $\vec{u}$ vektörünü temsil etmek üzere $\forall\ \vec{u}$ için,

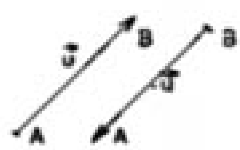
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$
$$\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

yazabiliriz. Şu halde :

> ***3. Vektörler kümesinde tanımlanan toplama işleminin etkisiz elemanı vardır ve sıfır vektörüdür.***

Yine paralelkenar kuralından $\forall$ A, B nokta çifti için,

$$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}$$
$$\vec{BA}+\vec{AB}=\vec{BB}$$



yazabiliriz. Bu da $\vec{AB}$ nün toplama işlemine göre tersinin $\vec{BA}$ olduğunu gösterir. $\vec{AB}$ nün tersi $\vec{BA}$ dır denir ve $\vec{AB}=-\vec{BA}$ ve $\vec{BA}=-\vec{AB}$ yazılır. Şu halde:

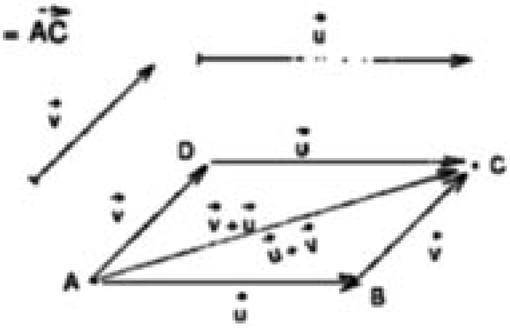
4. Vektörler kümesinde, her vektörün toplama işlemine göre bir tersi vardır.

Her bir $\vec{u}$ vektörünün toplama işlemine göre bir tersi vardır ve $-\vec{u}$ dır.

$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{DC}$ yönlü doğru parçaları $\vec{u}$ vektörünü temsil ettiğine göre,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

demek $\vec{u} + \vec{v}$ vektörünün temsilcisi $\overrightarrow{AC}$ yönlü doğru parçası demektir. Yani $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ demek $\vec{v} + \vec{u}$ vektörünün temsilcisi $\overrightarrow{AC}$ yönlü doğru parçası demektir. Buradan $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ olduğu görülür. O halde :



5. Vektörler kümesinde tanımlanan toplama işleminin değişme özeliği vardır.

Böylece şu teoremi göstermiş olduk.

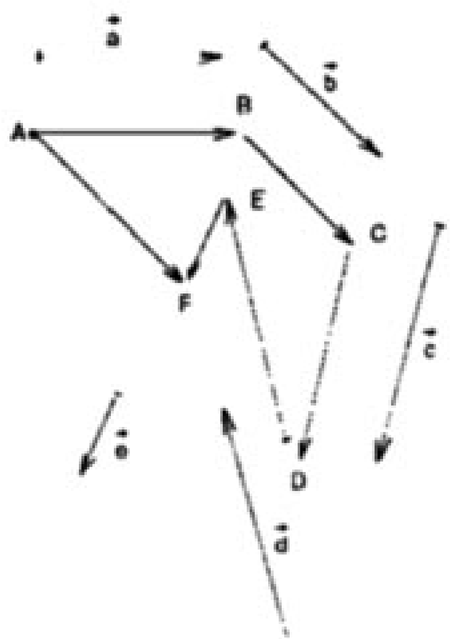
Teorem : Vektörler kümesi toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

Örnek : Aşağıda verilen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ vektörlerinin toplamını bulunuz.

Çözüm : Düzlemin herhangi bir A noktası seçilir. $\vec{a}$ vektörünün temsilcisinin başlangıç noktası A da olacak şekilde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ vektörlerinin temsilcileri olan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ ve $\overrightarrow{EF}$ yönlüdoğru parçaları çizilir. Burada, bir vektörün bitim noktası diğer vektörün başlangıç noktası olacak şekilde vektörlerin ekle[illegible]iğine dikkat ettiniz mi? AF nün toplam v[illegible]tör olduğunu gördünüz mü? Öyleyse

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$$

dır.



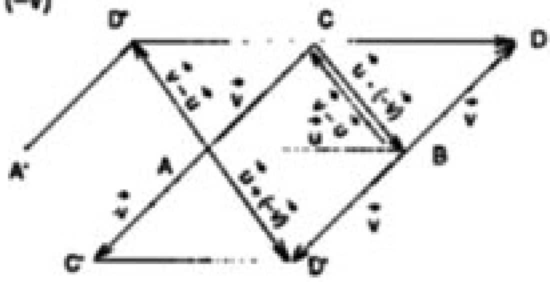
İki Vektörün Farkı

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki vektör verilmiş olsun. $\vec{u}-\vec{v}$ ve $\vec{v}-\vec{u}$ vektörlerine $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nün fark vektörleri denir. Bu vektörleri paralelkenar kuralı ile çizelim.

$\vec{v}$ nün zıt yönlü vektörü olan $-\vec{v}$ ile $\vec{u}$ nün toplamı

$$\vec{u} + (-\vec{v})$$

yazılır. Yandakı şekli inceleyiniz. $-\vec{v}$ ile $\vec{u}$ üzerine kurulan paralelkenarın $\overrightarrow{AD'}$ köşegeni ABDC paralelkenarının $\overrightarrow{CB}$ köşegeni ile aynı doğrultu aynı yön ve aynı uzunluktadır. O halde,



$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$$

dır. Buna göre,

$$\overrightarrow{BC} = -(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$$

dır.

İki vektörün farkı olan vektör, bu iki vektör üzerine kurulabilen paralelkenarın ikinci köşegeni üzerinde yer alan bir yönlü doğru parçası ile temsil edilir. **Fark vektör, bitim noktası hangi vektörün bitim noktası ise, o vektörden diğeri çıkarılarak bulunur.**

Örnekler

1. A, B, C gibi herhangi üç nokta verildiğinde paralelkenar kuralı $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ olduğuna göre,

a) O (sıfır vektörü), herhangi bir P noktası için, $\overrightarrow{PP} = \vec{O}$ dır. Gösteriniz.

b) Herhangi P ≠ Q nokta çifti için $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ olduğunu gösteriniz. (Daha önce tanımladığımız bu iki özeliği $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ den elde etmemiz isteniyor.)

Çözüm :

a) Paralelkenar kuralından A = B = C = P alırsak

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$$

yazabiliriz. Buradan $\overrightarrow{PP} = \vec{O}$ olduğu açıktır.

b) A = C = P ve B = Q alalım. O zaman paralelkenar kuralından

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{O}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

elde edilir.

2. Bir doğru üzerinde başlangıç noktası O, herhangi iki nokta A ve B olsun. [AB] nın orta noktası K olduğuna göre,

a) $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

bağıntısı vardır. Gösteriniz.

b) O noktası [AB] nın dışında ise aynı bağıntının sağlandığını gösteriniz.

Çözüm : Yandaki şekli inceleyiniz.

a) $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK}$

yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} \quad ①$$

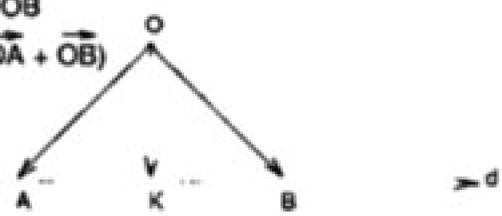
olur. Burada $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KK} = \vec{O}$

olduğu açıktır. ① ifadesinden

$$2\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

olur.



b)

Vektörlerin toplamı tanımından

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanarak

$$2\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK}$$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BK}$ olduğundan $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \vec{O}$

Buradan

$$2\,\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

veya

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

bulunur.

3. Herhangi bir ABC üçgeninde

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Paralelkenar kuralına göre yandaki şekilden,

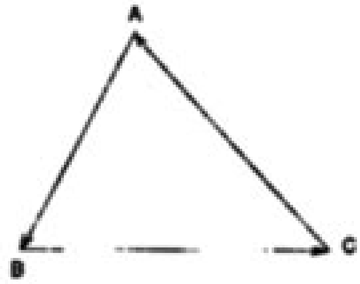
$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

$$\vec{AC}=-\vec{CA}$$

olduğundan

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$$

bulunur.

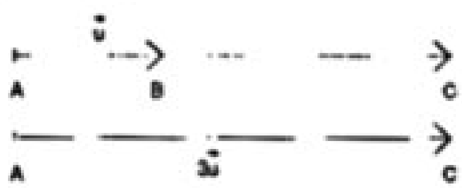


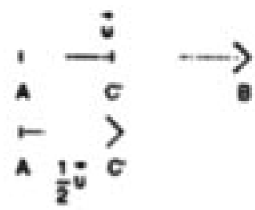
Bir Reel Sayı İle Bir Vektörü Çarpma (Skalar ile Çarpma)

$\vec{u}$ bir vektör k da keyfi bir reel sayı olsun. Reel sayılar vektörlerin yanında kullanıldıkları zaman skalar adını alırlar. Buna göre k bir skalar, $\vec{u}$ da bir vektör olmak üzere $k\vec{u}$ yeni bir vektördür. Bu yeni vektöre k skaları ile $\vec{u}$ vektörünün çarpımı olan vektör diyeceğiz. Eğer $\vec{u}=\vec{0}$ ise k skaları ne olursa olsun $k\vec{u}=\vec{0}$ dür. Eğer $\vec{u}\neq\vec{0}$ ve $\vec{AB}$ yönlü doğru parçası ile temsil ediliyorsa :

$k > o$ olduğu zaman $\vec{AB}$ nin taşıyıcı doğrusu üzerinde öyle bir tek C noktası vardır ki, $\vec{AC}$ yönlü doğru parçası $\vec{AB}$ ile aynı doğrultu ve yönde olduğundan başka, $\vec{AC}$ nin boyu, $\vec{AB}$ nin boyunun k katıdır. $k\vec{u}$ yu $\vec{AC}$ ile temsil ediyoruz. ($|\vec{AC}| = k\,|\vec{AB}|$ dır.)

Örneğin : $k=3$ ve $k=\frac{1}{2}$ verilen bir $\vec{u}$ için söz konusu olan $3\vec{u}$ ve $\frac{1}{2}\vec{u}$ aşağıdaki gibi gösterilebilir.





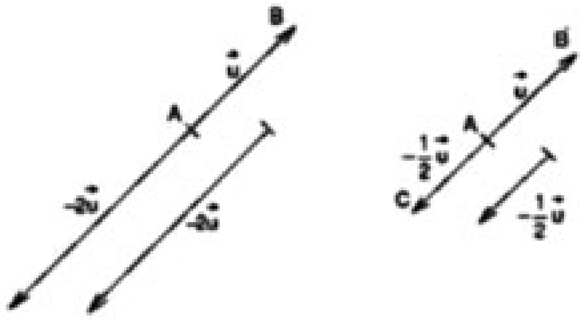
$k\vec{u}$ vektörü düzlemde A noktasının seçilişinden bağımsız olarak belirtilmiştir. Eğer $k = o$ ise $k\vec{u}=\vec{0}$ olarak tanımlıyoruz.

Eğer, $k < o$ ise $k\vec{u}$ vektörünü $-((-k)\,.\,\vec{u})$

olarak tanımlıyoruz. Çünkü $k < o$ için $-k > o$ dır ve $-k\vec{u}$ yu az önce tanımlamıştık.

O zaman ilk (–) işareti zıt yönü belirtmekle olduğundan $k\vec{u}$ ile $\vec{u}$ zıt yönlü olacaktır. $|k| < 1$ ise $k\vec{u}$ nun boyu $\vec{u}$ nunkinden küçük olacaktır.

Örneğin $k = -2$ ve $k = -\frac{1}{2}$ alalım.



Örneklerde de gördüğünüz gibi;

$0 < k < 1$ için $k\vec{u}$ nun boyu $\vec{u}$ nunkinden kısa fakat yönleri aynı **(aynı yönde bir kısalma)** dır.

$k > 1$ için **doğrultu** ve yön değişmiyor, fakat boy uzuyor. (Aynı yönde bir uzama oluyor.)

$k < 0$ için, $\vec{u}$ ile $k\vec{u}$ nun sadece doğrultuları değişmiyor.

Böylece şu sonucu verebiliriz :

Bir k skaları ile bir $\vec{u}$ vektörünün çarpımında doğrultular değişmiyor.

Bu nedenle, $\vec{u}$ ve $k\vec{u}$ vektörlerine doğrultuları aynı olan vektörler anlamında olmak üzere **lineer bağımlı** vektörler denir.

Bir skalar ile Bir Vektörün Çarpımının Özelikleri

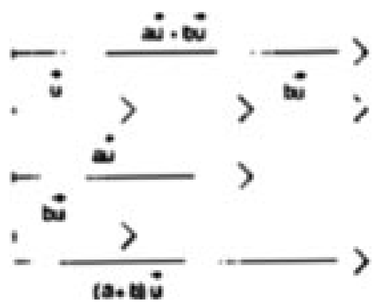
Teorem : a, b herhangi iki skalar, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ herhangi iki vektör olmak üzere skalar ile vektörü çarpmanın aşağıdaki özelikleri vardır :

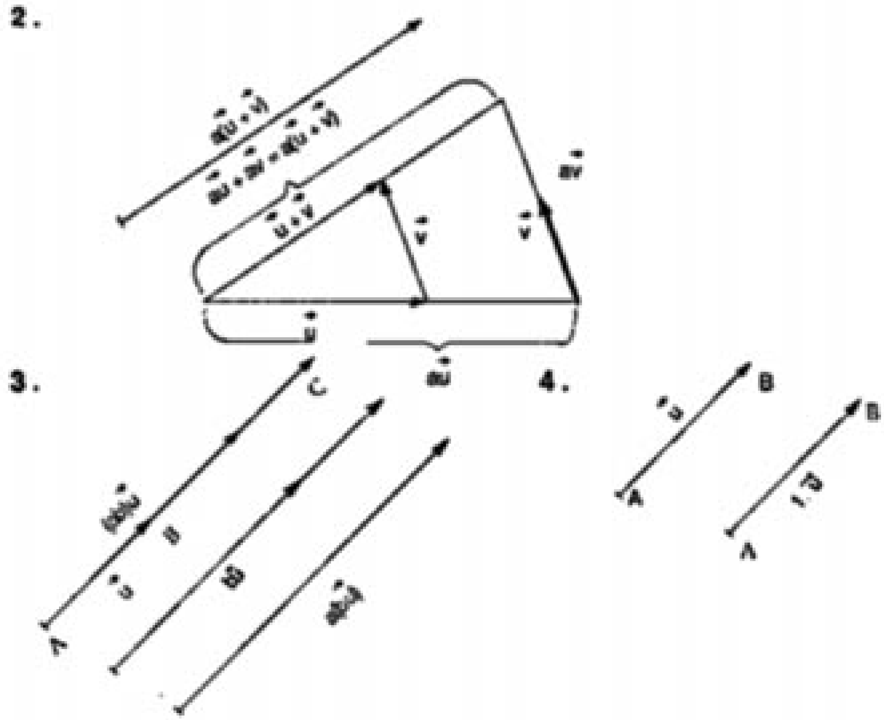
1. $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ **2.** $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

3. $(ab) \cdot \vec{u} = a(b\vec{u})$ **4.** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Yukarıdaki özeliklerin varlığını aşağıdaki şekilleri inceleyerek görünüz.

1.





Düzlemde Nokta–Vektör Eşlemesi

Noktalar ve vektörler arasında aşağıdaki iki aksiyom ile bir eşleme kurulabilir :

a) A, B gibi iki nokta verildiğinde $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının temsil ettiği bir vektör vardır.

b) $\vec{u}$ ile temsil edilen bir vektör ve bir A noktası verildiğinde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde bir tek B noktası vardır.

Bu iki aksiyomu kısaca şu şekilde de ifade edebiliriz :

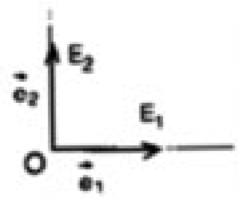
a′) Analitik düzlemde iki nokta bir vektör belirler.

b′) Analitik düzlemde bir nokta (başlangıç noktası) tesbit edildiğinde diğer noktaların her biri, bir vektöre karşılık gelir. Bu vektöre karşılık geldiği noktanın **konum (yer) vektörü** adı verilir.

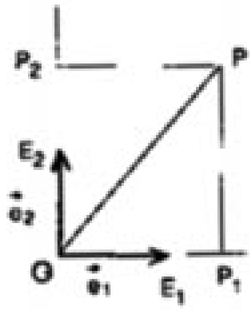
Düzlemde Dik Çatı

Düzlemde doğrultuları birbirine dik ve boyları birer birim olan iki vektör $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ olsun. Düzlemin keyfi bir noktası (başlangıç noktası) O olarak seçilsin. O zaman $\vec{e}_1$ vektörüne ve $\vec{e}_2$ vektörüne(b′) aksiyomu gereğince, sırası ile, E_1 ve E_2

noktaları karşılık gelecektir. Böylece ortaya çıkan $(O; E_1, E_2)$ nokta üçlüsü veya $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ üçlüsü düzlemde bir **dik çatı** adını alır. Bu dik çatı sayesinde düzlemin herhangi bir P noktasını sıralı iki reel sayı ile eşlemek mümkün olur :



Şekilde görüldüğü gibi verilen bir P noktasından geçen ve biri $\overrightarrow{OE_1}$ e ve diğeri $\overrightarrow{OE_2}$ ye paralel olan iki doğru çizelim. Bu doğruların, sırası ile OE_1 ve OE_2 yi kestiği noktalar P_1 ve P_2 olsun. Paralelkenar kuralından



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$$

dır. Bir sayı ile vektörün çarpımı tanımından

$$\overrightarrow{OP_1} = k_1\,\overrightarrow{OE_1} = k_1\,\vec{e_1}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = k_2\,\overrightarrow{OE_2} = k_2\,\vec{e_2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\overrightarrow{OP} = k_1\,\overrightarrow{OE_1} + k_2\,\overrightarrow{OE_2} = k_1\,\vec{e_1} + k_2\,\vec{e_2}$$

elde edilir. Bu demektir ki, bir P noktası verildiğinde bu noktaya bir (k_1, k_2) sıralı reel sayı çifti karşılık getirilmiş olur.

Tersine (k_1, k_2) sayı çifti verilirse

$$\overrightarrow{OP_1} = k_1\,\overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{OP_2} = k_2\,\overrightarrow{OE_2}$$

den P_1 ve P_2 noktaları bulunur ve bu noktalardan, sırası ile, $\overrightarrow{OE_2}$ ve $\overrightarrow{OE_1}$ e paralеler çizilirse bu iki paralelin kesiştiği nokta (k_1, k_2) sayı çiftine karşılık gelen a olarak bulunmuş olur.

Demek ki, her bir reel sayı çiftine düzlemin bir noktası karşılık gelmektedir. anlamda olmak üzere $P(k_1, k_2)$ yazılır. Ancak şunu önemle belirtmek gerekir . burada k_1 birinci ve k_2 de ikinci sayıdır. Bu durumu belirtmek için (k_1, k_2) sayı ine **sıralı reel sayı ikilisi** diyeceğiz. O halde şu sonucu ifade edebiliriz.

Düzlemde bir dik çatı sayesinde, düzlemin noktaları ile sıralı sayı ikilileri bire bir karşılık gelirler.

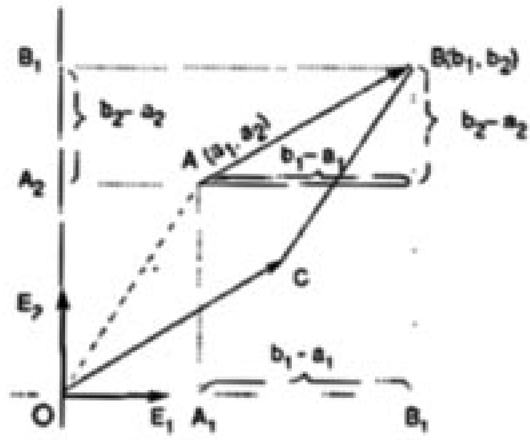
Sıralı sayı ikilisinin birincisine ve ikincisine karşılık geldiği noktanın, sırası ile, **apsisi** ve **ordinatı** adı verilir ve nokta anlamında $P(k_1, k_2)$ yazılır.

P noktası, dik çatı sayesinde, $\overrightarrow{OP}$ ile temsil edilen $\vec{u}$ vektörü belirttiğini biliyoruz. Bu nedenle (k_1, k_2) sıralı sayı ikilisine $\vec{u}$ vetörünün **bileşenleri** (k_1 birinci bileşon, k_2 ikinci bileşen) denir ve vektör anlamında $\overrightarrow{OP} = (k_1, k_2)$ yazılır.

Bu durumda O(0,0) ve $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ olduğunu kolayca yazabiliriz. Aynı şey demek olan $\overrightarrow{OO} = (0,0)$ ve $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ dir.

Bileşenleri İle Verilen İki Noktanın Belirttiği Vektör

Düzlemde bir $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dik çatısı ve bu çatıya göre $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ noktaları verilmiş olsun. Şekilde görüldüğü gibi $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının belirttiği vektör için birinci bileşen b_1-a_1 ve ikinci bileşen b_2-a_2 dir. Buna göre $\overrightarrow{BA}$ vektörünün bileşenleri de (a_1-b_1, a_2-b_2) olacağını görebildiniz mi? Buna göre $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına karşılık gelen vektöre eş olan yer vektörü $\overrightarrow{OC}$ olsun. $\overrightarrow{OC}$ nin ve $\overrightarrow{AB}$ nin aynı vektörü temsil ettikleri için, ikisinin de bileşenleri (b_1-a_1, b_2-a_2) olduğu açıktır. Bu durumu şekilden de, üçgenler arasındaki ilişkilerden yararlanarak gösterebilirsiniz.



Bileşenleri Cinsinden Vektörlerin Eşitliği

Tanım : $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ verilmiş olsun, Bu vektörlerin eşitliği

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \,,\; a_2 = b_2$$

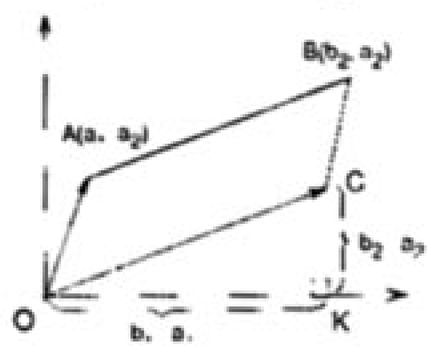
biçiminde tanımlanır.

Bu tanıma göre bileşenleri karşılıklı olarak eşit olan vektörlere **eşit vektörler** diyoruz. Tersine iki vektör eşit ise aynı numaralı bileşenlerinin karşılıklı olarak eşit olduğunu anlıyoruz.

Yer Vektörünün Uzunluğu

Yandaki şekli inceleyiniz.

$\overrightarrow{OC}$ yer vektörü ile $\overrightarrow{AB}$, aynı vektörün iki temsilcisi ve bileşenleri aynı olduğundan başka, boyları (uzunlukları) da eşittir.



$\overrightarrow{OC}$ nin uzunluğu, şekilde OKC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından

$$|OC|^2 = |OK|^2 + |KC|^2$$

olduğundan

$$|OC|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

veya her iki taraf da pozitif olduğundan, karekök alarak

$$|OC| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

olur. Biz bu değere $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklık demiştik.

Örnek 1 : $\vec{a} = (2, x-1)$ ve $\vec{b} = (y, 3)$ veriliyor. $\vec{a} = \vec{b}$ ise x ve y ne olmalıdır?

Çözüm :

Tanımdan,

$$2 = y \;,\; x - 1 = 3$$

veya

$$y = 2 \;,\; x = 4$$

bulunur.

Örnek 2 : $\vec{a} = (x + y, 2)$ ve $\vec{b} = (4, x - y)$ vektörlerinin eşit olması için x ve y değerleri ne olmalıdır?

Çözüm :

Tanımdan,

$$x + y = 4$$
$$x - y = 2$$

yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \\ + \quad x - y = 2 \\ \hline 2x = 6 \\ x = 3 \end{array}$$

ve $x + y = 4$ denkleminde $x = 3$ yazılırsa

$$3 + y = 4$$
$$y = 1$$

bulunur.

Bileşenleri Cinsinden Vektörlerde Toplama İşlemi

Düzlemde bileşenleri ile verilen iki vektör $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ise bu iki vektörün toplamı diye,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

vektörüne denir.

Toplama işleminin özeliklerini şu teorem ile verelim.

Teorem : Düzlemde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ herhangi üç vektör olsun.

a) İki vektörün toplamı yine bir vektördür. (Kapalılık Öz.)

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (birleşme özeliği)

c) $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$ (birim eleman özeliği)

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$ olacak şekilde her bir $\vec{a}$ vektörü için bir tek $-\vec{a}$ vektörü vardır. (Ters eleman öz).

e) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (değişme özeliği).

Örnek 1: $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (7, 2)$ vektörlerinin toplamını bulalım :

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 7), 5 + 2)$$
$$= (9,7)$$

dir.

Örnek 2 : $\vec{a} = (-3, 6)$, $\vec{O} = (0, 0)$ vektörlerinin toplamını bulalım. :

$$\vec{a} + \vec{O} = (-3 + 0, 6 + 0)$$
$$= (-3, 6)$$
$$= \vec{a}.$$

Bileşenleri Cinsinden İki Vektörün Farkı

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ olmak üzere}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

biçiminde belirlenirse, fark işlemi, toplama işleminden yararlanarak tanımlanmış olur.

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2)$$
$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

dir.

Örnek : $\vec{a} = (7, 4)$ ve $\vec{b} = (-1, 2)$ vektörleri veriliyor. $\vec{a} - \vec{b}$ ve $\vec{b} - \vec{a}$ vektörlerini bulalım :

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$	$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$
$= (7 - (-1), 4 - 2)$	$= (-1 - 7, 2 - 4)$
$\vec{a} - \vec{b} = (8, 2)$	$= (-8, -2)$

bulunur.

Bileşenleri Cinsinden Bir Vektörün Bir Sayı ile Çarpımı

Tanım : k bir reel sayı ve $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ise k ile $\vec{a}$ nın çarpımını $k\vec{a}$ ile gösteririz ve

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

şeklinde tanımlarız.

Örnek $\vec{a} = (-3, 5)$ vektörünü $k = -2$ ile çarpalım:

$$(-2) \,.\, \vec{a} = (-2) \,.\, (-3, 5) = (6, -10)$$

dır.

Bir sayı ile bir vektörün çarpımının aşağıdaki özelikleri vardır:

Teorem :

1. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$, $\quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$ ve $\forall\, k \in R$ için,
2. $(k_1 + k_2)\,\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$, $\quad \forall\, k_1, k_2 \in R$ ve $\forall\, \vec{a} \in V$ için,
3. $(k_1 \,.\, k_2) \,.\, \vec{a} = k_1\,(k_2\vec{a})$, $\quad \forall\, k_1, k_2 \in R$ ve $\forall\, \vec{a} \in V$ için
4. $1 \,.\, \vec{a} = \vec{a}$

dır.

İki Vektörün Paralelliği

Tanım : $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verilen sıfırdan farklı iki vektör olmak üzere $\vec{a} = k\,\vec{b}$ ise bu iki vektörün paralel olduğunu ve tersine $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ paralel ise bu eşitliğin var olduğunu anlayacağız.

Buna göre $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ olmak üzere $\vec{a} = k\,\vec{b}$ ise bu iki vektörün paralel olduğunu ve tersine $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ paralel ise bu eşitliğin var olduğunu söyleyeceğiz.

Şu halde $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ olmak üzere

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

ise

$$(a_1, a_2) = k(b_1, b_2)$$
$$(a_1, a_2) = (kb_1, kb_2) \Leftrightarrow \left\} \begin{array}{l} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{array} \right.$$

veya aynı şey demek olan

$$\boxed{\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k}$$

olduğu görülür. Bu sonuncu ifade iki vektörün paralelliği için bileşenlerinin sağlaması gereken ve yeten bir koşuldur.

Örnek : $\vec{a} = (-4, 5)$ ve $\vec{b} = (k, 10)$ vektörlerinin paralel olması için k ne olmalıdır?

Çözüm :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{-4}{k} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

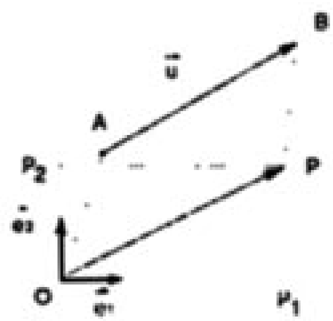
$$k = -8$$

bulunur.

Analitik Düzlemde Vektörlerle İlgili Uygulamalar

Verilen Bir Vektörün Bileşenleri

Yandaki şekilde görüldüğü gibi $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile verilen bir vektör $\vec{u}$ olsun. Paralelkenar kuralından yararlanarak $\vec{u}$ nun konum vektörünü $\overrightarrow{OP}$ olarak çizebiliriz. Yine paralelkenar kuralından yararlanarak



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2},\ \overrightarrow{OP_1} = u_1\vec{e}_1,\ \overrightarrow{OP_2} = u_2\vec{e}_2$$

olduğundan $\vec{u}$ vektörünün bileşenleri u_1, u_2 dir. Yani $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dir.

Buradan anlaşıldığına göre $\vec{u}$ vektörünü veren bileşen vektörler, $\overrightarrow{OP_1}$ ve $\overrightarrow{OP_2}$ nin boyları olan u_1, u_2 sayıları $\vec{u}$ nun bileşenleridir. **Bileşen vektörlerle bileşenler** arasındaki ilgiyi gördükten sonra bu iki kavramı karıştırmamak gerektiğini unutmayınız !

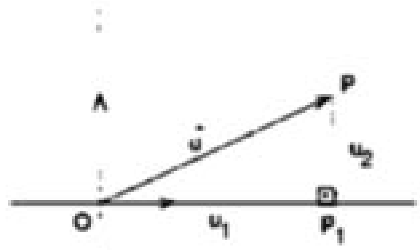
$\vec{u}$ vektörünün uzunluğunu bileşenleri cinsinden kolayca ifade edebiliriz.

OP_1P dik üçgeninde dik kenarların uzunlukları u_1, u_2 olduğundan hipotenüsün uzunluğu $\vec{u}$ nun boyu olup Pisagor bağıntısından

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

veya

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



olduğu görülür. Burada $\vec{u}$ vektörünün boyu için $\|\vec{u}\|$ yazdığımıza dikkat ediniz.

$\vec{u}$ vektörü $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile verilirken $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ noktaları ile de verilebilir. Bu durumda

$$\|\vec{u}\| = |AB|$$

olduğu açıktır. Yandaki şekle göre AKB dik üçgeninden

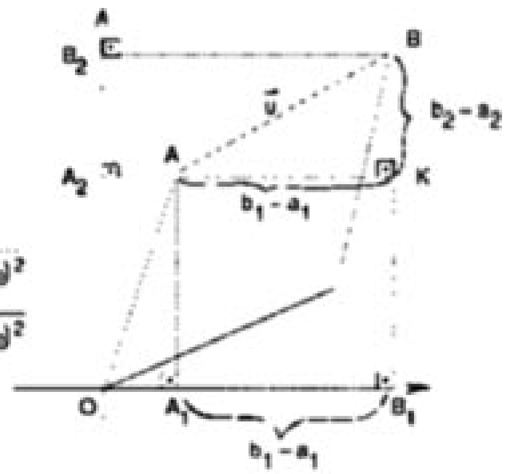
$$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2$$

$$|AB|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

olduğu kolayca görülmektedir.



Örnekler :

1. $A(2, -2)$, $B(5, -6)$ olduğuna göre $\overrightarrow{AB}$ ile temsil edilen vektörün boyunu bulalım :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(5-2)^2 + [-6-(-2)]^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$= 5 \text{ birim}$$

olur.

2. Merkezi M(3, 1) olan ve P(−1, 4) noktasından geçen çemberin yarıçapını bulalım :

$$\overrightarrow{MP} = (-1-3, 4-1)$$
$$\overrightarrow{MP} = (-4, 3)$$

olduğu açıktır. $\overrightarrow{MP}$ vektörü çembere ait yarıçap vektörlerden birisidir. Bütün yarıçap vektörlerinin boyları aynı ve çemberin yarıçapı olarak adlandırıldığı için,

$$r = \| \overrightarrow{MP} \| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$$
$$= 5 \text{ birim}$$

bulunur.

3. $\vec{u} = (4, 2)$ ve $\vec{v} = (-1, 5)$ olduğuna göre $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + 2\vec{v}$, $-3\vec{u} + \vec{v}$ vektörlerinin bileşenlerini bulalım :

$$\vec{u} + \vec{v} = (4, 2) + (-1, 5)$$
$$= (4 + (-1), \ 2 + 5) = (3, 7)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$
$$= (4, 2) + (1, -5)$$
$$= (4 + 1, 2 - 5)$$
$$= (5, -3)$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (4, 2) + 2(-1, 5)$$
$$= (4, 2) + (-2, 10)$$
$$= (2, 12)$$

$$-3\vec{u} + \vec{v} = -3(4,2) + (-1, 5)$$
$$= (-12, -6) + (-1, 5)$$
$$= (-12 + (-1), -6 + 5)$$
$$= (-13, -1)$$

4. $\vec{u} = (4, 7)$, $\vec{v} = (a, b)$ olduğuna göre $\vec{u} + \vec{v} = \vec{O}$ olması için a ve b ne olmalıdır?

Çözüm :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{O}$$

$$(4, 7) + (a, b) = (0, 0)$$

$$(4 + a, 7 + b) = (0, 0)$$

İki vekörün eşitliği tanımından

$$4 + a = 0 \ , \ 7 + b = 0$$

$$a = -4 \ , \ b = -7$$

bulunur. O halde,

$$\vec{v} = (-4, -7)$$

veya bir vektörün bir sayı ile çarpımı tanımından

$$\vec{v} = -(4, 7)$$

$$= -\vec{u}$$

bulunur.

5. $\vec{u} = (a_1, a_2)$, $\vec{v} = (b_1, b_2)$ olmak üzere,

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

bağıntısı var ise

$$(a_1, a_2) = k(b_1, b_2)$$

$$(a_1, a_2) = (kb_1, kb_2)$$

$$a_1 = kb_1 \ , \ a_2 = kb_2$$

veya

$$\frac{a_1}{b_1} = k \ , \ \frac{a_2}{b_2} = k$$

veya

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya vektörlerin **paralelliğinin** (lineer bağımlılığının) **bileşenleri cinsinden ifadesi** olarak bakabiliriz. Buna göre,

$$\vec{u} = (1, -2) \ , \ \vec{v} = (-2, 4)$$

vektörlerinin paralel olup olmadığına bakalım :

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

olduğundan,

$$\vec{v} = -2(1, -2)$$
$$\vec{v} = -2\vec{u}$$
$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$$

dir. Yani vektörler paraleldir.

Fakat $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (3, -1)$ vektörleri için

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-1}$$

olduğundan $\vec{a} \neq k\vec{b}$, yani $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ paralel değildir.

Birim Vektör

Tanım : Uzunluğu (boyu) bir birim olan vektöre **birim vektör** adı verilir.

Bu tanıma göre her vektörün belirttiği doğrultu ve yönde bir tek birim vektör vardır. Gerçekten bir $\vec{u} \neq \vec{0}$ vektörü için bu birim vektör

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$$

olarak hesaplanır. Burada $\frac{1}{\|\vec{u}\|} > 0$ olduğundan u ile $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ aynı doğrultu ve yöndedir. Ayrıca $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ vektörünün boyunun da 1 birim olduğunu ilerde göstereceğiz.

$\vec{u}$ vektöründen, $\frac{1}{\|\vec{u}\|}$ ile çarparak bir birim vektör olan $\vec{u}_0 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ vektörünü elde etme işine $\vec{u}$ vektörünü **normlama** denir.

Örnek : $\vec{u} = (3, 4)$ vektörünü normlayalım.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= 5$$

olduğundan

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{5}(3, 4)$$
$$\vec{u}_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

bulunur. Gerçekten normlanmış vektörün boyunun 1 olduğunu görelim.

$$\vec{u}_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$\|\vec{u}_0\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$\|\vec{u}_0\| = 1 \text{ br}$$

dir.

İki Vektörün Lineer Bileşimi

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ aynı doğrultuya sahip iki vektör ise, $k \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere, bunu,

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

ile ifade etmiştik. $k = -\frac{a}{b}$ diyelim. O zaman

$$\vec{u} = -\frac{a}{b} \cdot \vec{v}$$

veya buradan

$$a\vec{v} + b\vec{u} = \vec{O}$$

elde edilir. $k \neq 0$ olduğundan a ve b sıfırdan farklı olmak zorundadır. Dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin paralelliğini $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sıfırdan farklı olmak üzere

$$\boxed{a\vec{v} + b\vec{u} = \vec{O}}$$

bağıntısının varlığı ile ifade edebiliriz. Ayrıca, daha önce iki vektör paralel ise bu vektörlere **lineer bağımlı** vektörler demiştik.

$\vec{O}$ vektörü her vektörle lineer bağımlıdır. Bu istisna durumu da göz önüne alarak (1) ifadesinin, a ve b den en az birinin sıfırdan farklı olmak üzere sağlanması $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nin lineer bağımlı olması şartıdır, diyebiliriz. $\vec{v} = \vec{o}$ için a ne olursa olsun $a \, . \, \vec{O} = \vec{O}$ olduğundan $a \neq 0$ için $b = 0$ olsa bile ① bağıntısı sağlanır. Dolayısıya $\{\vec{O}, \vec{u}\}$ çifti lineer bağımlıdır. ① ifadesine $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nin bir **lineer bileşimi** adı verilir.

Doğrultuları farklı olan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki vektör için ① ifadesindeki a ve b sayılarının her ikisi de ayrı ayrı sıfır olmak zorundadır. Bu, diğer bir ifadeyle, $\vec{u} = k\vec{v}$ olacak şekilde bir k sayısının mevcut olmaması demektir. Böyle iki vektöre **lineer bağımsız** (paralel olmayan) vektörler diyeceğiz.

Şu halde ① ifadesinde,

1) a ve b den en az biri (veya her ikisi) sıfırdan farklı olabiliyorsa $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ çifti **linner bağımlıdır.**

2) a ve b den her ikisi de ayrı ayrı sıfır olmak zorunda ise $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ çifti **lineer bağımsızdır.**

Örnek 1 : $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını görelim : Bunun için,

$$a \, . \, \vec{e}_1 + b \, . \, \vec{e}_2 = \vec{O}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemi bileşenlerle yazalım.

$$a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$$
$$(a, 0) + (0, b) = (0, 0)$$
$$(a, b) = (0, 0)$$

veya iki vektörün eşitliği tanımından

$$a = 0 \text{ ve } b = 0$$

olmak zorundadır. O halde $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vektörleri lineer bağımsızdırlar.

Örnek 2 : $\vec{u} = (-1, 2)$ ve $\vec{v} = (-2, 4)$ vektörlerinin lineer bağımlı olduklarını görelim. Bunun için yine,

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{O}$$

denkleminden hareket edeceğiz. Bu denklemi bileşenler cinsinden yazarsak

$$a(-1, 2) + b(-2, 4) = (0, 0)$$
$$(-a, 2a) + (-2b, 4b) = (0, 0)$$
$$(-a - 2b, 2a + 4b) = (0, 0)$$

veya buradan,

$$-a - 2b = 0$$
$$2a + 4b = 0$$

yazılabilir. İkinci denklem birinci denklemin –2 katıdır. O halde elimizde a ve b gibi iki bilinmeyen, fakat,

$$-a - 2b = 0$$

gibi bir tek denklem var. Buradan,

$$a = -2b$$

olur. b = k (k keyfi bir değer) dersek

$$a = -2k$$

olur. k = 1 için a = –2 ve b = 1 olduğundan a ve b sıfırdan farklıdır. Yani verilen vektörler lineer bağımlıdır.

Gerçekten

$$\vec{v} = 2\vec{u}$$

yazılabilir.

Uyarı : $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer bağımlı oldukları, paralel oldukları gösterilerek de ispatlanabilir.

Gerçekten

$$\frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ paralel, dolayısıyla lineer bağımlıdır.

Düzlemdeki vektörlerden ikiden fazlası daima lineer bağımlıdır.

Örnek : $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1)$ ve $\vec{w} = (3, 4)$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu görelim :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{O}$$

denkleminden hareket edeceğiz. Bu denklemi bileşenler cinsinden yazarsak

$$a(1, 0) + b(2, 1) + c(3, 4) = (0, 0)$$
$$(a, 0) + (2b, b) + (3c, 4c) = (0, 0)$$
$$(a + 2b + 3c, 0 + b + 4c) = (0, 0)$$

veya buradan,

$$a + 2b + 3c = 0$$
$$b + 4c = 0$$

yazılabilir. Burada 2 denklem ve 3 bilinmeyen var. Bilinmeyenlerden birine keyfî bir değer verelim. $c = k$ olsun.

$$a + 2b = -3k$$
$$b = -4k$$

Buradan

$$a + 2(-4k) = -3k$$
$$a - 8k = -3k$$
$$a = 5k$$

bulunur. $k = 1$ için $a = 5$, $b = -4$, $c = 1$ olduğundan verilen $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektörleri lineer bağımlıdır. (a, b, c değerlerinin sıfırdan farklı olduğuna dikkat ediniz.)

Düzlemdeki vektörlerin kümesi için lineer bağımsız olan herhangi iki vektörün oluşturduğu ikiliye düzlemdeki vektörler kümesi için bir **taban (baz)** adı verilir. Eğer bir tabandaki vektörler, özel olarak $\vec{e_1} = (1, 0)$ ve $\vec{e_2} = (0, 1)$ ise bu tabana düzlemdeki vektörler kümesi için **standart taban** (temel taban) veya **standart baz** adını vereceğiz. O halde $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ düzlemdeki vektörler kümesi için standart tabandır.

Standart tabanın önemli bir özeliği, her vektörü bu taban vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak yazabileceğimizdir.

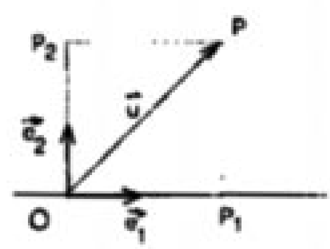
Gerçekten bir $\vec{u}$ vektörü verildiğinde, yandaki şekilden de görüldüğü gibi $\vec{u}$ nün temsilcisinin başlangıç noktasını orijin olarak seçmek suretiyle, paralelkenar kuralından

$$\vec{u} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}, \quad \vec{OP_1} = u_1\vec{e_1}, \quad \vec{OP_2} = u_2\vec{e_2}$$

yazılabileceğinden

$$\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}$$

olur.



Tersine, $\vec{u}$ vektörü bileşenleriyle yazılırsa yine

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1, u_2) \\ &= (u_1, 0) + (0, u_2) \\ &= u_1(1, 0) + u_2(0, 1) \\ \vec{u} &= u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek : $\vec{u} = (2, 3)$ vektörünü standart taban vektörleri cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (2, 3)\\ &= (2, 0) + (0, 3)\\ &= 2(1, 0) + 3(0, 1)\\ \vec{u} &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2\end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki soruyu da benzer biçimde siz yapınız.

Soru : $\vec{u} = (-1, 3)$ vektörünü standart taban vektörleri cinsinden yazınız.

Uygulamalar

1 . $\vec{u} = (2, 2)$ vektörünü normlayalım.

Önce $\vec{u}$ nun birim vektör olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{2^2 + 2^2}\\ &= 2\sqrt{2} \neq 1\end{aligned}$$

olduğundan $\vec{u}$ bir birim vektör değildir. Şimdi $\vec{u}$ nun doğrultu ve yönündeki birim vektör, $\vec{u}_0$ olduğuna göre, $\vec{u}_0$ nü bulalım.

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 2)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\\ \vec{u}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\end{aligned}$$

dır. *(Anlayamadıysanız sayfa 110 ve 111'e tekrar bakınız.)*

2. $\vec{u} = (5, -2)$ vektörü veriliyor. $\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{O}$ denklemiyle verilen $\vec{x}$ vektörünün bileşenlerini bulalım :

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ diyelim. Denklemi, bileşenler cinsinden yazarsak,

$$\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{O}$$

$$(5, -2) + 2(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$(5 + 2x_1, -2 + 2x_2) = (0 , 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 5 + 2x_1 = 0 &\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2} \\ -2 + 2x_2 = 0 &\Rightarrow x_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{x} = \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

bulunur.

3. $\vec{a} = (-2, 4)$ vektörünü, $\vec{u} = (1, 2)$ ve $\vec{v} = (2, 2)$ vektörleri cinsinden ifade edelim.

$$\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v}$$

diyelim. Bu denklemi bileşenler cinsinden yazarsak

$$(-2, 4) = m(1, 2) + n(2, 2)$$

$$= (m, 2m) + (2n, 2n)$$

$$(-2, 4) = (m + 2n, 2m + 2n)$$

veya buradan

$$m + 2n = -2$$

$$2m + 2n = 4$$

bulunur. Birinci denklem ikinci denklemden çıkarılırsa $m = 6$ bulunur. Bu değer birinci denklemde yerine konarak $n = -4$ bulunur.

Bulunan değerler

$$\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v}$$

denkleminde yerlerine yazılarak

$$\vec{a} = 6\vec{u} - 4\vec{v}$$

elde edilir.

4. $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 2)$, $\vec{w} = (2, 2)$ vektörleri veriliyor. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ vektörünü $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ nın lineer bileşimi olarak ifade edelim. :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{w}$$

$$(2, -3) + (-1, 2) + (2, 2) = a(2, 3) + b(2, 2)$$

$$[2 + (-1) + 2, 3 + 2 + 2] = (2a, 3a) + (2b, 2b)$$

$$(3, 7) = (2a + 2b, 3a + 2b)$$

$$\begin{array}{l|r} 2a + 2b = 3 & -2a - 2b = -3 \\ 3a + 2b = 7 & \underline{+\ 3a + 2b = \ 7} \\ & a = \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2 \,.\, a + 2b = 3 \to 2 \,.\, 4 + 2b = 3 & \\ \Rightarrow 8 + 2b = 3 & b = -\frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2b = -5 & \end{array}$$

O halde

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 4\vec{u} - \frac{5}{2}\,\vec{w}$$

yazılabilir.

5. Sıfır vektörünün dahil olduğu her vektör ikilisi lineer bağımlıdır.Gösterelim :

$\vec{u} \neq \vec{O}$ olmak üzere $\{\vec{u}, \vec{O}\}$ ikilisini ele alalım.

$b \neq 0$ olmak üzere

$$a\vec{u} + b\vec{O} = \vec{O}$$

veya buradan,

$$a\vec{u} = \vec{O}$$

dan $a = 0$ olur, fakat $b \neq 0$ olabileceğinden $\{\vec{u}, \vec{O}\}$ ikilisi lineer bağımlıdır.

6. Sadece sıfır vektöründen oluşan bir vektör kümesi de lineer bağımlıdır. Gerçekten

$$a\vec{O} = \vec{O} \Rightarrow a \neq 0$$

olabilir. Bu da $\{\vec{O}\}$ kümesinin lineer bağımlı olması demektir.

7. $\vec{u} = (4, 7)$ vektöründen oluşan küme lineer bağımsızdır. Gerçekten :

$$a\,\vec{u} = \vec{O}$$

denklemini ele alalım. $\vec{u} \neq \vec{O}$ olduğundan $a = 0$ olmak zorundadır. O halde $\{\vec{u}\}$ lineer bağımsızdır.

ÖZET

Yönlü doğru parçası; üzerinde bir ucundan diğerine bir yön tesbit edilen doğru parçasıdır.

Vektör; düzlemdeki yönlü doğru parçalarının eşlik bağıntısına göre denklik sınıflarına denir.

Sıfır vektörü, başlangıç ve bitim noktaları aynı olan yönlü doğru parçasının temsil ettiği vektör. Bu vektörün bileşenlerinin ikisi de sıfırdır.

Vektörlerde eşitlik, temsilcileri eş yönlü doğru parçaları olan vektörlere eşittir denir. Bu vektörlerin bileşenleri karşılıklı olarak eşittir.

Vektörlerde toplama, paralelkenar kaidesi ile tanımlanır. İki vektörün toplamı, bu iki vektör üzerine kurulabilen paralelkenarın birinci köşegenidir.

İki vektörün toplamının bileşenleri aynı numaralı bileşenlerin toplamıdır.

Lineer bağımlı vektörler, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ iki vektör için $\vec{u} = k\vec{v}$ yazılabiliyorsa bu iki vektöre paraleldir veya lineer bağımlıdır denir. Aksi halde $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektörlerine **lineer bağımsız**dırlar denir.

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \text{ ve } \vec{v} = (x_2, y_2) \text{ ise } \vec{u} = k\vec{v} \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \text{ dır.}$$

Nokta–vektör eşlemesi; düzlemde noktalar ile vektörler arasında aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir.

a) İki nokta bir vektör belirtir.

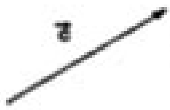
b) Düzlemde bir nokta tesbit edildiğinde (orijin) geri kalan her bir nokta bir vektör belirtir.

Birim vektör; boyu bir birim olan vektöre denir.

$\vec{u}_o = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ ise $\|u_o\| = 1$ dir. $\vec{u}$ nun normu $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ olarak tanımlanır.

ALIŞTIRMA VI

1. Yanda verilen vektörlerin paralelkenar kuralını uygulayarak toplamını ve farkını gösteriniz.

2. 

vektörü veriliyor. $\frac{1}{2}\,\vec{c}$ ve $-3\vec{c}$ vektörlerini çiziniz.

3. $\vec{a} = (3, -k)$, $\vec{b} = (3, 4)$ vektörleri eşit olduğuna göre $2k-1$ değerini hesaplayınız.

4. $\vec{u} = (3, -9)$, $\vec{v} = (-m, 12)$ vektörleri paralel olduğuna göre m nin değerini bulunuz.

5. $A(4, -2)$, $B(2, -9)$ olduğuna göre $\vec{AB}$ vektörünün bileşenlerini ve boyunu bulunuz.

6. $\vec{u} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ vektörü ile aynı yönlü olan birim vektörü bulunuz.

7. $\vec{a} = (1, -3)$ vektörü veriliyor. $\vec{a} + 2\vec{y} = \vec{O}$ eşitliğine uyan $\vec{y}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz.

8. $\vec{AB} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ ve $B(3, 4)$ olduğuna göre A noktasının koordinatları nedir?

9. $\vec{a} = (3, -3)$, $\vec{b} = (4, k)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için k ne olmalıdır?

10. $\vec{a} = (3, -7)$, $\vec{b} = (12, 4)$ olduğuna göre $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ işlemini yapınız.

11. $\vec{u} = (1, -2k)$ ve $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ vektörleri veriliyor. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri dik olduğuna göre k nin değerini bulunuz.

12. Aşağıdaki vektör çiftlerinin iç çarpımlarını ve aralarındanki açının kosinüsünü hesaplayınız.

a) $\vec{a} = (3, 15)$, $\vec{b} = (10, -2)$

b) $\vec{u} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

c) $\vec{a} = 5\vec{e}_1$, $\vec{b} = -2\vec{e}_2$

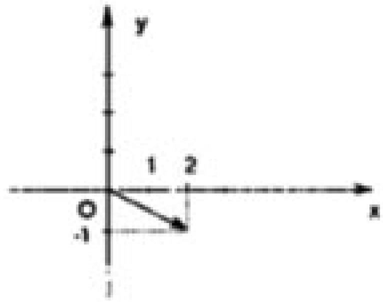
13. $\vec{u} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{v} = 2t\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$ vektörleri veriliyor.

a) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel ise,

b) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri dik ise t nin alacağı değeri bulunuz.

DEĞERLENDİRME SORULARI VI

1. Yandaki grafik aşağıdaki vektörlerden hangisine aittir?



a) $\vec{u} = 2\vec{e}_1$
B) $\vec{u} = \vec{e}_2$
C) $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$
D) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$
E) $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

2. Uç noktaları A(3, 4) ve B(5, 7) olan $\vec{AB}$ vektörünün bileşenleri hangileridir?

A) (8, 11) B) (2, 11) C) (8, 7)
D) (2, 3) E) (4, 1)

3. $\vec{a} = (-3, 4)$ ve $\vec{b} = (5, 3)$ vektörleri için $2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektörünün bileşenleri hangileridir?

A) (9, 13) B) (−21, −1) C) (−9, 17)
D) (11, 5) E) (−6, −9)

4. $\vec{AB} = 8\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ ve A(4, −6) olduğuna göre B noktasının koordinatları hangileridir?

A) (4, −3) B) (8, −6) C) (12, −3)
D) (8, 9) E) (12, −6)

5. $\vec{AB} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$ ve B(−1, 4) olduğuna göre A noktasının koordinatları hangileridir?

A) (−4, 9) B) (−4, −9) C) 4, −9)
D) (2, −1) E) (2, 9)

6. $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ vektörünün boyu hangisidir?

A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) $-\sqrt{5}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

7. $\vec{u} = 4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ olduğuna göre $\frac{1}{2}\vec{u}$ hangisidir?

A) (4, 6) B) (4, −6) C) (2, 6)
D) (4, −3) E) (2, −3)

8. A(3, −8), B(5, −4) ise $\vec{BA}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−2, −4) B) (8, −12) C) (15, 32)
D) (−1, −3) E) (2, −4)

9. $\vec{a}$ = (2, 1) ve $\vec{b}$ = (3, −5) ise $\vec{a} + (-2\vec{b})$ vektörü aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) (−1, −7) B) (5, 9) C) (−4, 11)
D) (−4, −4) E) (5, 8)

10. $\vec{A}$ = (2, −4), $\vec{B}$ = (0, 2) ve C noktası [AB] nin orta noktası olduğuna göre C nin yer vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, −1) B) (−1, 1) C) (1, 1)
D) (2, −2) E) (-2, 2)

11. $\vec{a}$ = (2, x), $\vec{b}$ = (24, 5) ve $2\vec{a} + (-\vec{b})$ = (0, 0) ise x ve y nin değrleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) x = 5, y = 2 B) x = 2 , $y = \frac{5}{2}$ C) x = −5, y = 1
D) x = 3, $y = \frac{3}{2}$ E) $x = \frac{5}{2}$, y = 2

12. A(3, 5), B(−2, 7) noktaları verildiğine göre $\|\vec{AB}\|$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) $\sqrt{170}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{33}$

13. A(−3, −1), B(x, y) veriliyor. $\vec{AB}$ nin konum vektörü $\vec{OP}$ = (2, 2) ise (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−1, −1) B) (−1, 1) C) (1, −1)
D) (−2, −2) E) (−1, −2)

14. A(2, −1), B(3, 2), C(1, 4) noktaları veriliyor. $\vec{AB} = \vec{CD}$ koşulunu gerçekleyen D noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 5) B) (2, 9) C) (2, 7)
D) (3, 7) E) (0, 7)

15. $\vec{a}$ = (3, -2m) vektörünün boyunun 5 olması için m ne olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

16. A(−1, 4), B(x, −6), C(2, 7) olduğuna göre $\vec{AB} = \vec{BC}$ ise x . y aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 8 B) 16 C) −18
D) −16 E) −8

17. $\vec{a} = (-6, 1)$, $\vec{b} = (10, 5)$, $\vec{c} = (-1, 1)$ olduğuna göre $\vec{a} + \vec{b} + \vec{u} = 2\vec{c} - \vec{u}$ eşitliğini sağlayan $\vec{u}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 2) B) (−3, 2) C) (2, 3)
D) (4, −5) E) (−3, −2)

18. $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (0, -2)$, $\vec{c} = (1, 7)$ vektörleri veriliyor. $\vec{a}$ vektörünün, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörlerinin lineer bileşimi türünden yazılışı hangisidir?

A) $-4\vec{b} - \vec{c}$ B) $-4\vec{b} + \vec{c}$ C) $-2\vec{b} - \vec{c}$
D) $2\vec{b} + \vec{c}$ E) $4\vec{b} - \vec{c}$

19. $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, k)$ ve $\vec{c} = (1, 9)$ vektörleri veriliyor. $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$ olması için k ne olmalıdır?

A) −1 B) 1 C) −2
D) 2 E) 6

20. $\vec{a} = (5, 12)$ vektörü ile aynı doğrultu ve yönde olan birim vektör hangisidir?

A) $\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ B) $\left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ C) $\left(\frac{5}{12}, 1\right)$
D) $\left(\frac{-5}{12}, -1\right)$ E) $\left(\frac{-5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

21. $\vec{u} = (2, 5)$ vektörünün $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ türünden yazılışı hangisidir?

A) $2\vec{e}_1$ B) $5\vec{e}_2$ C) $2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$
D) $2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ E) $-2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$

22. $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, k)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için k ne olmalıdır?
A) −6 B) −3 C) 3
D) 4 E) 6

KAYNAKÇA

1. Analitik Geometri adını taşıyan kitaplar,
2. Liseler için Analitik Geometri I.MEB yayınları.