



ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

İÇİNDEKİLER

- 7 Giriş
- 7 Çember Denklemi
- 3 Denklemi Verilen Çemberleri Analitik Düzlemde Çizme
- 7 Üç Noktası Verilen Çemberin Denklemi
- 7 Alırtımlar
- 3 Değerlendirme Soruları IV.

BU ÜNİTENİN AMAÇLARI VE KONUSU

Bu ünitenin esas amacı, çemberin analitik düzlemde değişik konumlarda denklemlerini elde etmek, çizimlerini yapmaktır. Bu amaçla,

- 3 Merkezli ve merkezli olmayan çemberlerin denklemlerinin bulunması verilmiş,
- 3 Denklemi verilen çemberin analitik düzlemde çizimi yapılmış,
- 7 Üç noktası verilen çemberin denkleminin bulunması işlenmiştir.

YASAL ÇALIŞMALI?

Bu ünitenin anlaşılabilmesi için daha önceki konuları ve çember hakkındaki bilgilerinizi tekrarlamanız gerekir.

- 7 Çemberin analitik incelenmesi konusu ile ilgili kaynakları ve kitabınızdaki örnekleri yaparak, çizerek tekrarlayınız.
- 7 Sonuçları karşılaştırınız.
- 7 Dersinizi TV programlarından da izleyiniz.
- 7 Anlamadığınız konuyu ders kitabınızdan ve çeşitli kaynaklardan tekrar çalışınız.
- 7 Bu derse ait değerlendirme sorularının çözümlerini yapmaya çalışınız. Yapmadığınız sorular için işlenişteki örneklere tekrar bakınız. Cevaplarınızı kitabın sonundaki cevap anahtarı ile karşılaştırınız.
- 7 Çalışmalarınızı plânlı yapınız. Konularınızı günü gününe çalışınız.

Giriş

Çember hakkında şimdiye kadar öğrendiğiniz bilgilere ek olarak bu kısımda çemberi, noktaların koordinatları yardımı ile inceleyeceğiz. Bu tür incelemelere analitik inceleme denir.

Çember denklemini ve denklemini bilinen çemberin düzleme yerleştirilmesi üzerinde duracağız.

Çember Denklemi

Düzlemde sabit bir noktaya olan uzaklıkları sabit olan noktaların kümesine çember denir. Düzlemde alınan sabit noktaya çemberin merkezi denir ve $M(a, b)$ ile gösterilir, sabit uzaklığa da çemberin yarıçapı denir ve r ile gösterilir.

Aşağıda, xOy koordinat düzleminde, merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap r olan çemberi inceleyiniz.

Çember üzerindeki herhangi bir nokta $K(x, y)$ olsun.

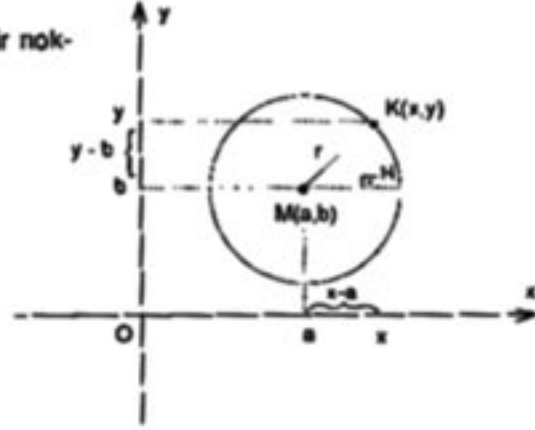
Şekilden,

$$|KH| = y - b$$

$$|MH| = x - a$$

$$|MK| = r \text{ dir.}$$

Niçin?



$$\text{KHM dik üçgeninde Pisagor bağıntısından } |MH|^2 + |KH|^2 = |MK|^2$$

veya

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

veya

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

elde edilir.

Bu denkleme çemberin denklemi denir.

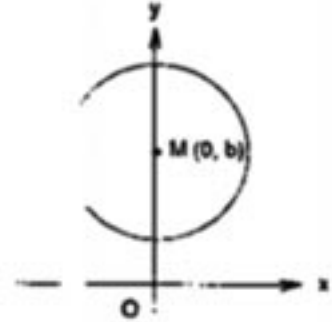
Bu denklemde;

1. $a = 0$ ise çemberin merkezi, $M(0, b)$ olacağından, Oy ekseni üzerindedir.

Yandaki şekli inceleyiniz. Merkezi Oy ekseni üzerinde bulunan çemberin denklemi,

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

biçiminde olur.



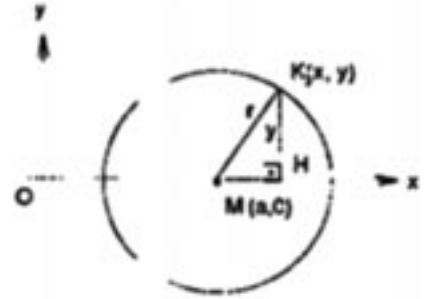
2. $b = 0$ ise çemberin merkezi Ox ekseni üzerindedir.

Yandaki şekli inceleyiniz.

Merkezi Ox ekseni üzerinde bulunan çemberin denklemi,

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

biçiminde olur.



3. $a = 0$ ve $b = 0$ ise çemberin merkezi orijindir. ϵz de bu tip çemberin şeklini çiziniz. Merkezi orijinde olan çemberin denklemi ise

$$x^2 + y^2 = r^2$$

biçiminde olur.

Bu çeşit denkleme çemberin **merkezil denklemi** denir.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemini açılırsa,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad \dots \text{I}$$

bulunur.

$$2a = A \quad 2b = B \quad a^2 + b^2 - r^2 = C$$

değerlerini I denkleminde yerlerine yazarsak,

$$x^2 + y^2 + Ax + By - C = 0 \quad \dots \text{II}$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme **çemberin genel denklemi** denir.

Genel denklemi ile verilen çemberin merkezinin koordinatları,

$$\left(a = -\frac{A}{2}, b = -\frac{B}{2} \right)$$

yarıçapı ise,

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

dir. Burada $A^2 + B^2 - 4C$ ye çember denkleminin diskriminantı denir ve Δ ile gösterilir.

$$\Delta = A^2 + B^2 - 4C$$

dir.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

denkleminde,

a) $\Delta > 0$ ise bu denklem bir reel çember belirtir. Bu çemberin merkezinin koordinatları ve yarıçapı,

$$M \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right), r = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}$$

olur.

b) $\Delta = 0$ ise $r = 0$ olacağından çember, bir noktadan ibarettir. Bu çembere **nokta çemberi** denir.

c) $\Delta < 0$ ise yarıçap reel sayı olmadığından bu koşula uygun çember yoktur. Böyle çemberlere **sanal çemberler** de denir.

d) Çember denklemleri, iki dereceden iki bilinmeyenli denklemler olup, x^2 ile y^2 nin katsayıları aynı ve xy li terimin katsayısı sıfırdır.

Örnekler :

1. Aşağıda merkezlerinin koordinatları ve yarıçapları verilen çemberin denklemlerinin nasıl bulunduğunu inceleyiniz.

a) Merkezi $M (0, 0)$ ve yarıçapı 3 olan çemberin denklemini,

$$[x - 0]^2 + [y - 0]^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

olur

b) Merkezi $M (-1, 0)$ ve yarıçapı $r = 2\sqrt{3}$ olan çemberin denklemini,

$$[(x - (-1))]^2 + (y - 0)^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 12$$

olur. Niçin?

c) Merkezi M (0, 5) ve yarıçapı $r = 1$ olan çemberin denklemi,

$$x^2 + (y - 5)^2 = 1$$

veya

$$x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$$

olur. Niçin?

d) Merkezi M (-1, 4) ve yarıçapı $r = \frac{1}{3}$ olan çemberin denklemi,

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = \frac{1}{9}$$

olur. Eğer bu örnekleri anlamadıysanız, sayfa 62 deki formüle bakınız.

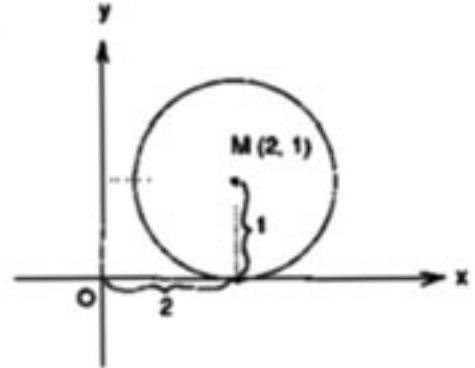
2. Merkezi M (2, 1) ve x - eksenine teğet olan çemberin denklemini yazalım.

Yandaki şekli inceleyiniz. Çemberin yarıçapı ile merkezin ordinatı arasındaki ilişki nedir?

Çemberin denklemi,

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

olur. Niçin?



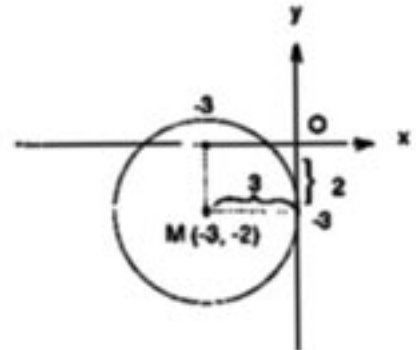
3. Merkezi M (-3, -2) ve y - eksenine teğet olan çemberin denklemini bulalım.

Yandaki şekli inceleyiniz.

Çember y- eksenine teğet olduğundan $r = 3$ tür. Niçin? Çemberin denklemi,

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

olur.



4. Merkezi M (3, -3) ve eksenlere teğet olan çemberin denklemini yazalım.

 Siz de bu örnekle ilgili şekli defterinize çiziniz.

Çemberin denklemi,

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

olur. Neden?

5. Merkezi M (-2, 4) ve üzerindeki bir noktası K (2, 7) olan çemberin denklemini bulalım.

Çemberin yarıçapı |MK| olduğundan,

$$r = |MK| = \sqrt{(2 + 2)^2 + (7 - 4)^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 9}$$

$$r = 5$$

(Bakınız sayfa 7)

olur. Çemberin denklemi ise,

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

olur.

6. A (1, -4), B (-3, 8) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını çap kabul eden çemberin denklemini bulalım.

$$a = \frac{-3 + 1}{2} = -1, \quad b = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

(Anlayamadıysanız sayfa 10'a bakınız.)

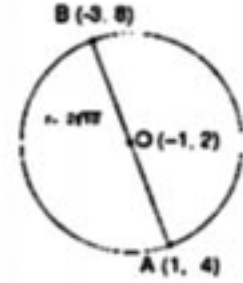
Çemberin merkezi O (-1, 2) ve

$$r = |OA| = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 + 4)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 36}$$

$$r = \sqrt{40}$$

$$r = 2\sqrt{10}$$



olur. Çemberin denklemi,

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 40$$

veya

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 35 = 0$$

olur.

7. $5x^2 + (2n - 1)y^2 - 20x + 10y - 55 = 0$ denkleminin bir çember belirtmesi için n nin alacağı değeri bulalım.

Verilen denklemin, bir çember belirtmesi için x^2 ve y^2 li terimlerin katsayılarının eşit olması gerektiğinden,

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= 5 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

olur.

8. $ax^2 + (5a - 2)y^2 + (a - k)xy - 3x + 2y + 4 = 0$ denkleminin bir çember belirtmesi için (a, k) ikilisinin değerini bulalım.

x^2 ve y^2 li terimlerdeki katsayılar eşit olacağından,

$$5a - 2 = a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ve xy li terimin katsayısı sıfır olacağından $a - k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ olur.

$$(a, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

dir.

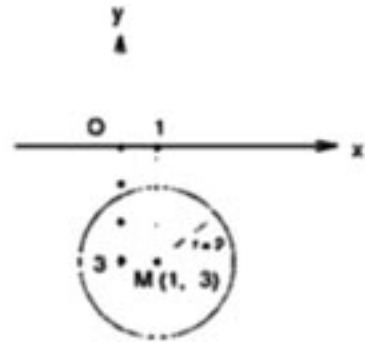
Denklemleri Verilen Çemberi Analitik Düzlemde Çizme

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

1. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ çemberini analitik düzlemde çizelim.

Çemberin merkezi $M(1, -3)$ ve yarıçapı $r = 2$ dir.

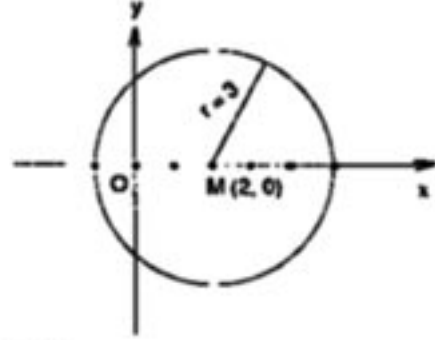
Pergelimizin sivri ucunu M noktasına batırır, 2 birim açarak çemberi çizeriz.



2. $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ çemberini çizelim.

$M(2, 0)$, $r = 3$

tür. Çizimi benzer şekilde yandaki gibi çizeriz.



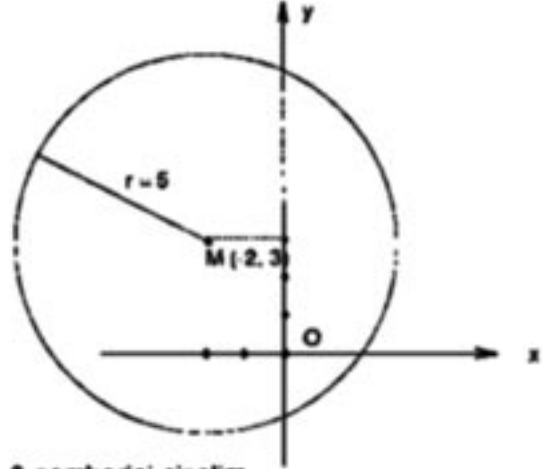
3. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ çemberini çizelim.

\downarrow \downarrow \downarrow
 A B C

$$\left. \begin{array}{l} a = -\frac{A}{2} \Rightarrow a = -\frac{4}{2} = -2 \\ b = -\frac{B}{2} \Rightarrow b = -\frac{-6}{2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow M(-2, 3)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 48} = 5$$

Yandaki çizimi inceleyiniz.



4. $-2x^2 - 2y^2 + 12x - 16y + 22 = 0$ çemberini çizelim.

$-2x^2 - 2y^2 + 12x - 16y + 22 = 0$ denkleminin her terimini -2 ile bölersek,

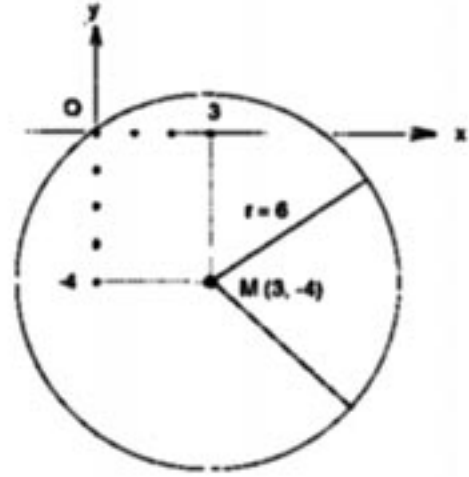
$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

olur.

$$M(3, -4), \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 64 + 44}$$

$$r = 6$$

dir. Çizimi yanda yapılmıştır. İnceleyiniz.

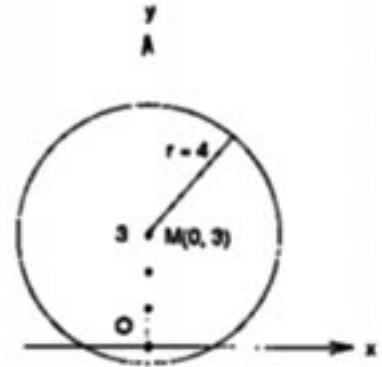


5. $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ çemberini çizelim.

$$M(0, +3), \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 4 \cdot (-7)}$$

$$= 4$$

Çizimi inceleyiniz.



Siz de denklemleri $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$, ve $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ olan çemberleri çiziniz.

Üç Noktası Verilen Çemberin Denklemi

D (1, 3), E (0, 1) ve F (-2, 0) noktalarından geçen çemberin denklemini bulun.

Çemberin genel denklemi olan,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

ifadesinden A, B ve C sayılarını belirleyerek, çemberin denklemini bulabiliriz.

Yukarıda verilen üç nokta çember üzerinde olduklarından, çemberin genel denklemini sağlarlar.

$$\begin{aligned} D(1, 3) \quad \text{için} \quad 1^2 + 3^2 + A + 3B + C &= 0 \\ A + 3B + C &= -10 \dots\dots\dots I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(0, 1) \quad \text{için} \quad 0^2 + 1^2 + 0 \cdot A + B + C &= 0 \\ B + C &= -1 \dots\dots\dots II \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(-2, 0) \quad \text{için} \quad (-2)^2 + 0^2 - 2A + 0 \cdot B + C &= 0 \\ \text{veya} \quad -2A + C &= -4 \dots\dots\dots III \end{aligned}$$

bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} I \dots\dots\dots A + 3B + C = -10 \\ II \dots\dots\dots B + C = -1 \\ III \dots\dots\dots -2A + C = -4 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözümünü inceleyiniz.}$$

II denklemden $C = -B - 1$ bulunur.

Bu değer I ve III denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\left. \begin{array}{l} A + 3B - B - 1 = -10 \\ -2A - B - 1 = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A + 2B = -9 \\ -2A - B = -3 \end{array} \right\}$$

Bu sistemin çözümünden,

$$A = 5, \quad B = -7$$

bulunur.

$$C = -B - 1 = -(-7) - 1 = 6$$


olur.

A, B ve C değerleri $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ denkleminde yerlerine yazılırsa, çemberin denklemi.

$$x^2 + y^2 + 5x - 7y + 6 = 0$$

olur.

Bu denkleme köşelerinin koordinatları D (1, 3), E (0, 1) ve F (-2, 0) olan üçgenin çevrel çemberinin denklemi de denir.

 Siz de köşelerinin koordinatları K (2, 0), L (-1, 0) ve M (-3, -1) olan üçgenin çevrel çemberinin denklemini bulunuz.

ÖZET

Merkezi orijinde olan ve yarıçapı r olan çemberin denklemi

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dir.

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r olan çemberin denklemi,

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dir. Bu denklemlerde x ve y çember üzerinde değişken bir noktadır.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemini açılarak

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Bu denkleme göre; merkezin koordinatları, $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ve yarıçapı $r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ dir.

Bir çemberin analitik düzlemde çizilebilmesi için merkezinin koordinatları ve yarıçapı bilinmelidir.

Üç noktası verilen çemberin denklemi: koordinatları, $K(x_1, y_1)$,

$L(x_2, y_2)$ ve $N(x_3, y_3)$ olan çemberin denklemini bulabilmek için,

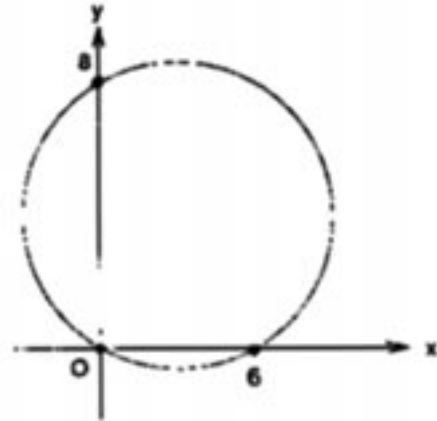
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ denkleminde, sıra ile, K, L, N nin koordinatları yerlerine yazılarak elde edilen lineer denklem sistemi çözülür ve A, B, C değerleri bulunur. Bu değerler çemberin genel denkleminde yerlerine yazılarak çemberin denklemi bulunur.

ALİŞTIRMALAR IV

1. Merkezinin koordinatları $M(-3, 1)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 3$ olan çemberin denklemini yazınız.
2. y eksenine teğet olan ve $M(-3, 1)$ merkezli çemberin denklemini yazınız.
3. Merkezi $M(3, -4)$ noktası olan ve $R(0, 1)$ den geçen çemberin denklemini bulunuz.
4. Denklemi $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ olan çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını yazınız.
5. $2x^2 + (3m - 7)y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ denkleminin bir çember belirtmesi için m ne olmalıdır?
6. $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ -sını çap kabul eden çemberin denklemini bulunuz.

DEĞERLENDİRME SORULARI IV

1. $x^2 + y^2 + 12x - 6y - 4 = 0$ denklemiyle verilen çemberin yarıçapının uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?
A) 6 B) 7 B) 8 D) 10 E) 14
2. $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 109 = 0$ çemberinin bir çapının uç noktasının koordinatları $(-5, 4)$ olduğuna göre öteki ucunun koordinatları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 6 B) 7 C) -3 D) -6 E) -7
3. Şekildeki çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$
B) $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 100$
C) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
D) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
E) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$



4. A (4, -3) noktası $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ çemberinin üzerindedir. Bir ucu (4, -3) olan çapın öteki ucu aşağıdakilerden hangisidir?
A) (5, 0) B) (1, -2) C) (3, -1) D) (2, 1) E) (1, 0)
5. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ çemberinin merkezinin koordinatları ve yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?
A) (-1, 2), $\sqrt{11}$ B) (1, -2), 4 C) (-2, 4), 11
D) (1, -2), 7 E) (-1, 2), 5
6. $(k-5)x^2 + (-3-k)y^2 - 16x = 0$ denklemi, bir çember belirtliğine göre bu çemberin yarıçapı aşağıdakilerden hangisidir?
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -1
7. Altıncı sorudaki çember denkleminde k'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
A) 4 B) 3 C) $2\frac{1}{2}$ D) 2 E) $1\frac{1}{2}$
8. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$ çemberinin merkezinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?
A) (3, 2) B) (3, -2) C) (-3, 2) D) (6, -4) E) (-6, 4)
9. $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ çemberinin yarıçapının karesi aşağıdakilerden hangisidir?
A) 16 B) 9 C) 25 D) 36 E) 28
10. M (2, 3), N (3, 2) ve P (-4, 3) noktalarından geçen çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
A) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 21 = 0$ B) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 23 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ D) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 21 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ çemberinin yarıçap uzunluğunun 7 olması için k ne olmalıdır?
A) 10 B) 8 C) 2 D) -2 E) -8

12. Şekildeki çemberin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

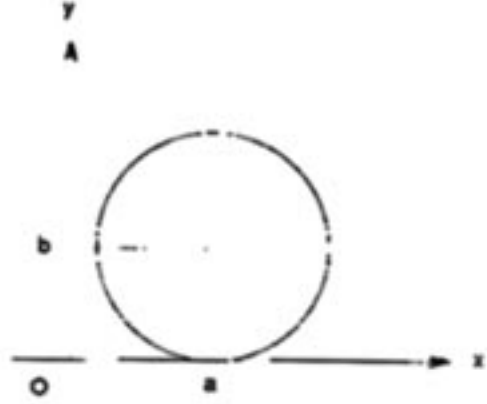
A) $(x - a)^2 = (y - b)^2 = ab$

B) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$

C) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = b^2$

D) $(x + a)^2 + (y - b)^2 = a^2$

E) $(x - a)^2 + (y + b)^2 = a^2$



13. Şekildeki çemberin denklemini aşağıdakilerden hangisidir?

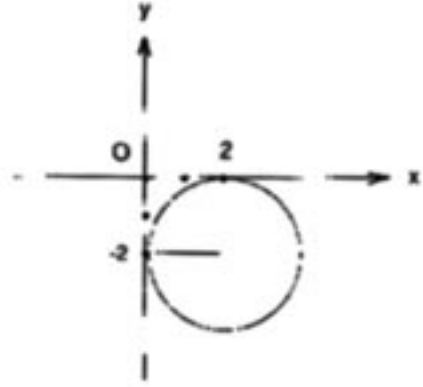
A) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

B) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

C) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

D) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

E) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$



14. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ çemberi veriliyor. Çemberin x eksenini kestiği noktaların apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4, 4\}$

B) $\{0, 8\}$

C) $\{0, -8\}$

D) $\{-8, 8\}$

E) $\{-4, 8\}$

15. $5x^2 + 5y^2 - 5x + 20y + 10 = 0$ çemberinin merkezinin apsis ve ordinatının çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1

B) -2

C) -3

D) -4

E) -5

16. A (1, 5) ve B (9, 13) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını çap kabul eden çemberin merkezinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4, -9\}$

B) $\{0, 4\}$

C) $\{+4, -9\}$

D) $\{-9, -4\}$

E) $\{5, 6\}$

17. Merkezi $(2, -3)$ olan ve Ox eksenine teğet olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ B) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 C) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ D) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$
 E) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$
18. Ox ve Oy eksenlerine teğet olan, $r = 3$ yarıçaplı çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(x+3)^2 + (y +3)^2 = 9$ B) $(x -9)^2 + (y - 9)^2 = 81$
 C) $(x -3)^2 + (y -3)^2 = 18$ D) $(x -6)^2 + (y -6)^2 = 36$
 E) $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 36$
19. $x^2 + y^2 - 4x + my + 25 = 0$ çemberinin Oy eksenine teğet olması için $m \in \mathbb{R}^+$ nedir?
- A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $3\sqrt{7}$ E) $4\sqrt{7}$
20. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ denkleminin bir tek nokta göstermesi için k ne olmalıdır?
- A) 56 B) 13 C) 8 D) 7 E) 3

KAYNAKÇA

1. Analitik geometri adını taşıyan kitaplar.
2. Liseler için Analitik Geometri I. M.E.B yayınları.