1 ANALİTİK DÜZLEM

İÇİNDEKİLER

- Giriş
- Sayı Doğrusu
- Analitik Düzlem
- İki Nokta Arasındaki Uzaklık
- Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları
- Bir Doğru Parçasının Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları
- Üçgenin Ağırlık Merkezi
- Üçgenin Alan Formülü
- Alıştırmalar
- Değerlendirme Soruları I

BU ÜNİTENİN AMAÇLARI VE İÇERİĞİ

Bu ünitenin esas amacı, üzerinde sayılarla geometri yapacağımız düzlemde bir başlangıç noktası seçmek ve bu noktaya birbirini dik kesen iki yönlü doğru parçasının nasıl yerleştirileceğini göstermek, böylece dik çatı kavramını tanıtmaktadır. Bu amaçla,

- Doğru üzerindeki noktalara gerçek sayıların nasıl yerleştirildiği, yani sayı doğrusu kavramı verilmiş,
- Düzlemdeki bir noktanın apsisinin ve ordinatının tanımı verilmiş,
- İki nokta arasındaki uzaklığın nasıl hesaplanacağı bir formülle verilmiş,
- Bir doğru parçasının orta noktasının koordinatlarının nasıl hesaplanacağı verilmiş,
- Bir doğru parçasını içten ve dıştan belli bir oranda bölen noktanın koordinatları; bu oran doğru parçasının uç noktalarının koordinatları cinsinden verilmiş,
- Bir üçgenin ağırlık merkezi tanımlanmış ve üçgenin köşe noktalarının koordinatları cinsinden verilmiş,
- Bir üçgenin alanı bu üçgenin köşe noktalarının koordinatları cinsinden bir formülle verilmiştir

NASIL ÇALIŞMALI

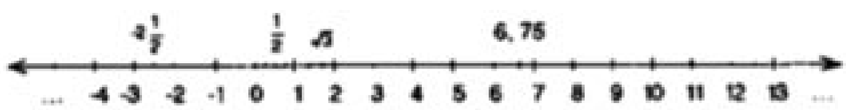
- Bu ünitenin anlaşılabilmesi için daha önceki sınıflardan öğrendiğiniz sayı doğrusu kavramına ait bilgilerinizi hatırlamaya çalışın, bunun için elinizdeki kaynaklarınıza bakın. Elinizde kalem, silgi ve bir karalama dosyası ile bu dersi okuyun, örnekleri bağımsız olarak cevaplamaya, hesapları bizzat yapmaya gayret ediniz. Sonucunuzu kitabınızdaki sonuçla karşılaştırın. Sonuçlar uyuşmuyorsa dönüp nerede hata yaptığınızı bulun. Doğru sonuca ulaşıncaya kadar bu işe devam edin.
- Derslerinizin TVden verildiği saatleri tesbit edin. Mümkünse elinizde kalem, kâğıt olduğu halde TVdeki dersleri takibedin.
- Şekilleri gözledikten sonra, bağımsız olarak çizmeye ve üzerinde yazılı olan değerleri yerleştirmeye mutlaka çalışın.
- Vaktiniz olduğu kadar örneklerin benzerlerini sizler de bulup çözün. Bu dersin sonundaki değerlendirme sorularının önce; bu dersin hangi kısmına ait olduklarını tesbit edin, hangi örneğin benzeri olduğunu görün ve sonra çözmeye başlayın.
- Bu üniteye ait değerlendirme sorularının cevapları kitabın sonunda verilmiştir. Önce çözünüz, sonra cevabınızı karşılaştırınız.

Giriş

Matematikte sayıların yeri önemlidir. Sayılardan yararlanarak **nokta, doğru** ve **düzlem** gibi geometrik kavramları ve bu kavramlar arasındaki bağıntıları açıklamak için analitik geometri ortaya çıkmıştır. Böylece geometride sayıların kullanılması dört işlemle beraber **eşitlik, denklem** ve **denklem sistemleri** gibi kavramların da kullanılmasını gerektirmiştir. Bu nedenle analitik geometri, geometrik kavramları sayısal kavramlar yardımı ile inceleyen bir bilim dalıdır, diyebiliriz.

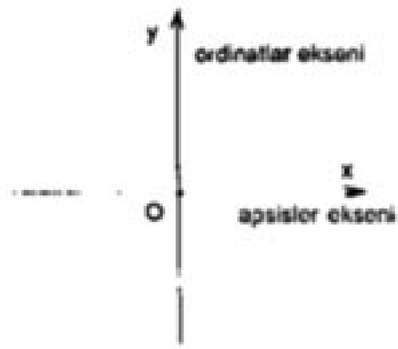
Sayı Doğrusu

Aşağıdaki şekli inceleyiniz. Şimdiye kadar öğrendiğiniz bilgileri hatırlayınız. Tüm reel sayıların, üzerindeki noktalarla eşlendiği doğruya, sayı doğrusu dediğimizi biliyorsunuz. *(Bak. İlköğretim 8. sınıf - orta 3. sınıf- matematik kitabına- MEB yayınları.)*



Analitik Düzlem

Bir düzlem ve bu düzlemde birbirini dik olarak kesen iki sayı doğrusu düşünelim.



Yandaki şekilde görüldüğü gibi, sayı eksenlerinin kesim noktası olan O, bu eksenlerin ikisinde de sıfır sayısına karşılık gelmektedir.

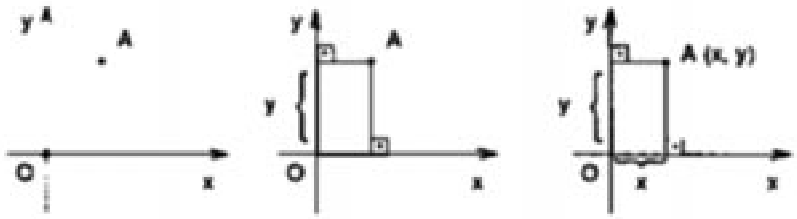
Burada O noktasına **başlangıç noktası** ya da **orijin** denir.

Genel olarak yatay durumda olan sayı doğrusuna **apsisler ekseni** veya **x-ekseni**, düşey durumda olan sayı doğrusuna da **ordinatlar ekseni** veya **y-ekseni** denir. Başlangıç noktası ile bu eksenlerin oluşturduğu üçlüye ise **dik koordinat çatısı** denir. Bir koordinat çatısı ile donatılmış bir düzleme, **koordinat düzlemi** veya **analitik düzlem** denir.

(Daha derinliğine bilgi için matematik I. 'e bakınız.)

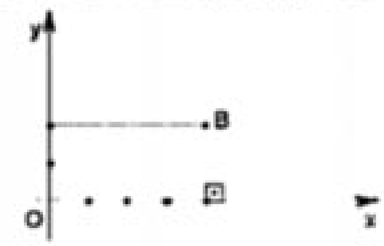
> ***Analitik düzlemin her noktasına bir (x, y) sıralı reel sayı ikilisi karşılık gelir.***

Aşağıdaki şekilleri inceleyerek, verilen bir A noktasına karşılık gelen sıralı (x, y) ikilisinin nasıl belirlendiğini açıklayınız.

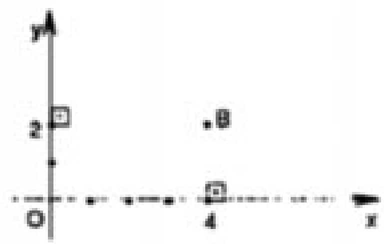


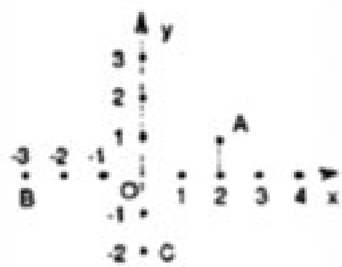
Analitik düzlemde bir noktaya karşılık gelen sıralı (x, y) ikilisine bu noktanın **koordinatları** denir. Burada x reel sayısına noktanın apsisi, y reel sayısına da noktanın **ordinatı** denir.

Yandaki şekilde, B noktasına karşılık gelen reel sayı ikilisini bulalım.



B noktasından x eksenine indirilen dikmenin, x eksenini kestiği noktanın O noktasına olan uzaklığı 4; y eksenine indirilen dikmenin, y eksinini kestiği noktanın O noktasına olan uzaklığı da 2 olur. Buna göre, B noktasına karşılık gelen reel sayı ikilisi ise, (4,2) veya B noktasının koordinatları (4,2) dir denir.





Örnek : Yandaki şekilde verilen A, B, C ve O noktalarının koordinatlarını bulalım.

A nın koordinatları (2,1)

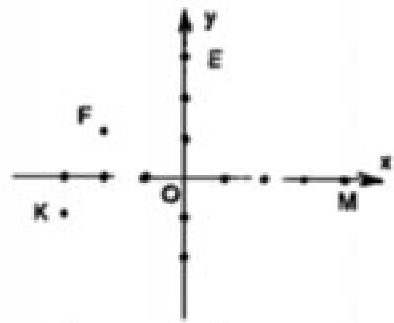
B nin koordinatları (-3,0)

C nin koordinatları (0,-2)

O nun koordinatları (0, 0)

dır.

✎ Siz de yandaki şekle göre E, F, K, M noktalarının koordinatlarını bulunuz.

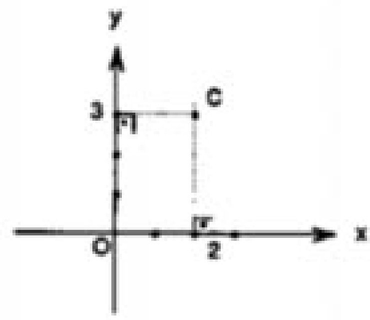


Analitik düzlemde, her sıralı reel sayı ikilisine bir nokta karşılık gelir.

Örnek : Analitik düzlemde (2, 3) reel sayı ikilisine karşılık gelen noktayı bulalım.

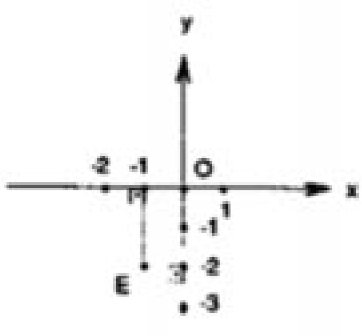
x ekseni üzerinde 2 birim alır, bu noktadan x eksenine bir dikme çizeriz. Sonra y ekseni üzerinde 3 birim alır. Bu noktadan da y eksenine bir dikme çizeriz.

Bu dikmelerin kesim noktası olan C noktası, (2, 3) reel sayı ikilisine karşılık gelen nokta olur.



Örnek : Analitik düzlemde (-1, -2) reel sayı ikilisne karşılık gelen noktayı bulalım.

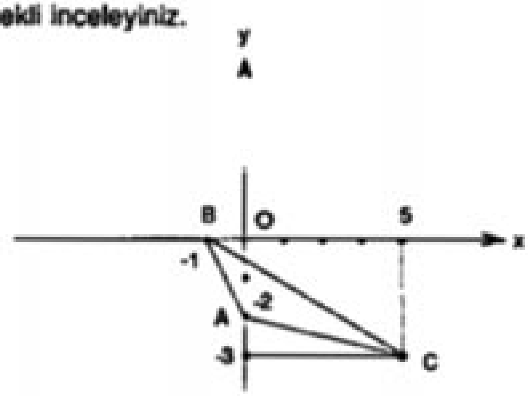
Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



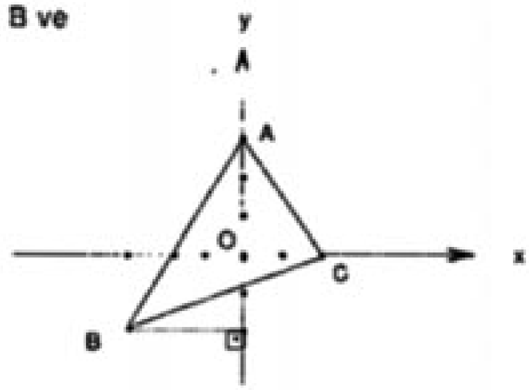
(-1, -2) reel sayı ikilisine karşılık gelen nokta E noktasıdır. Niçin?

Örnek : Köşelerinin koordinatları A (0, -2), B (-1, 0) ve C (5, -3) olan ABC üçgenini analitik düzlemde çizelim.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



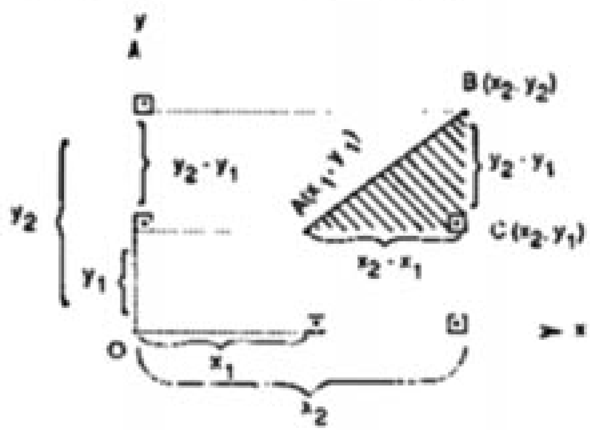
Siz de yandaki üçgenin A, B ve C köşelerinin koordinatlarını yazınız.



İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemde A (x_1, y_1) ve B (x_2, y_2) noktalarını alalım. A ve B noktaları arasındaki uzaklığı |AB| şeklinde gösterelim. |AB| uzunluğunu bulalım.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz. C noktası nasıl elde edildi?



ABC dik üçgeninde $|AC| = x_2 - x_1$ ve $|BC| = y_2 - y_1$ değil midir? Şimdi Pisagor bağıntısını uygulayalım.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

olur.

> ***Koordinatları verilen iki nokta arasındaki uzaklık; bu noktaların apsisleri farkı ile ordinatları farkının, kareleri toplamının, kareköküne eşittir.***

Örnek : Uç noktalarının koordinatları A(1, 3), B(0, 4) olan doğru parçasının uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(0 - 1)^2 + (4 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \text{ birim} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 4)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1} \\ &= \sqrt{2} \text{ birim} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek : C (-3, 5), D (5, -1) noktaları veriliyor. [CD] nin uzunluğunu bulalım.

$$\begin{aligned} |CD| &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (-1 - 5)^2} \\ &= 10 \text{ birim} \end{aligned}$$

olur.

Örnek : E (0, -1), F (8, m) noktaları veriliyor. $|EF| = \sqrt{68}$ birim olması için m yerine alınabilecek olan sayıların kümesini yazalım.

$$|EF| = \sqrt{(8-0)^2 + (m+1)^2} = \sqrt{68}$$

$$\sqrt{64 + (m+1)^2} = \sqrt{68}$$

$$64 + (m+1)^2 = 68$$

$$(m+1)^2 = 4$$

$$m+1 = 2 \ , \ m+1 = -2 \qquad \text{Niçin?}$$

$$m = 1 \ , \ m = -3$$

$$M = \{-3, 1\}$$

olur.

Örnek : Köşelerinin koordinatları A (0, 2), B (-3, 6) ve C (6, 10) olan ABC üçgeninin çevresinin uzunluğunu bulalım.

$$|AB| = \sqrt{(-3-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|AC| = \sqrt{(6-0)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|BC| = \sqrt{[6-(-3)]^2 + (10-6)^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$$

$$Ç = |AB| + |AC| + |BC| = 5 + 10 + \sqrt{97} = 15 + \sqrt{97} \quad \text{birim.}$$

olur.

✎ Siz de köşelerinin koordinatları D (4, 4), E (0, 1) ve F (2, 5) olan üçgenin kenar uzunluklarını bularak, dik üçgen olup olmadığına bakınız. Bu üçgen, dik üçgen ise hipotenüsünü söyleyiniz.

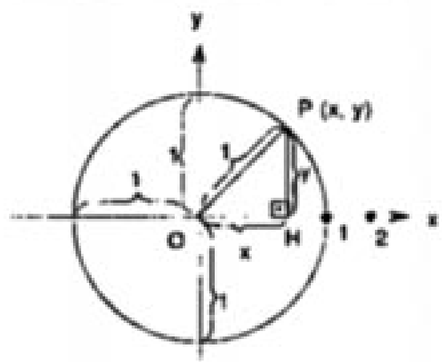
Örnek : Analitik düzlemde, orijine 1 birim uzaklıkta bulunan noktaların koordinatlarının sağladığı bağıntıyı bulalım.

Yandaki şekli inceleyiniz.

Orijine 1 birim uzaklıkta bulunan herhangi bir nokta P (x, y) olsun.

$|OP| = 1$

olduğundan,



$$|OP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

bağıntısı bulunur.

$x^2 + y^2 = 1$ bağıntısına uyan noktalar kümesine **birim çember** denir. $x^2 + y^2 = 1$ bağıntısına da birim çemberin denklemi denir.

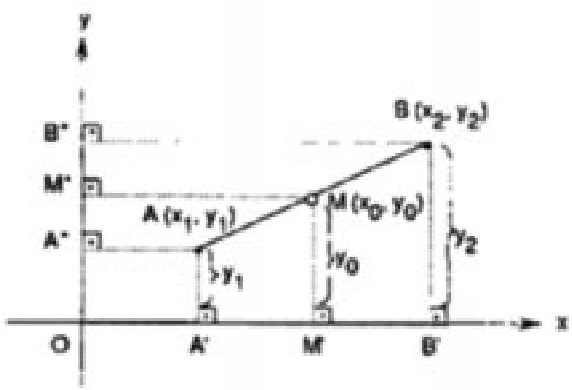
✎ Siz de OPH dik üçgeninden yararlanarak $x^2 + y^2 = 1$ bağıntısını yazınız.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

Uç noktalarının koordinatları A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) olan [AB] doğru parçasının orta noktasının koordinatlarını bulalım.

[AB] nın M orta noktasının koordinatları (x_0, y_0) olsun.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



A' B' BA dik yamuğunda [AA'] ve [BB'] tabanlar ve [MM'] de orta tabandır.

Bir yamukta orta taban uzunluğu; tabanların uzunlukları toplamının yarısına eşittir. *(Bakınız İlköğretim 8. sınıf matematik, MEB yayınları).*

$$|MM'| = \frac{|AA'| + |BB'|}{2}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

bulunur.

Aynı nedenle A" ABB" dik yamuğundan yararlanarak,

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

bulunur. O halde [AB] nın orta noktası olan M nin koordinatları $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dır.

Örnek : Uç noktalarının koordinatları A (1, 5), B (7, 11) olan doğru parçasının orta noktasının koordinatlarını bulalım.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 7}{2}, \quad x_0 = 4$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 11}{2}, \quad y_0 = 8$$

orta noktanın koordinatları (4, 8) olur.

Örnek : Uç noktalarının koordinatları E (-3, 6), F (2, -10) olan [EF] doğru parçasının K orta noktasının koordinatlarını bulalım.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2}, \quad y_0 = -2$$

$K\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$ bulunur.

Örnek : [DF] doğru parçasının orta noktası E dir. F (-3, 1), E (-5, 2) olduğuna göre D noktasının koordinatlarını bulalım.

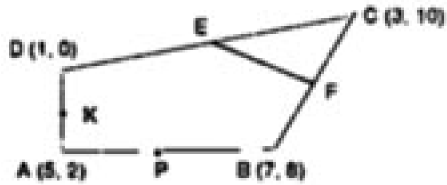
D (x_1, y_1) olsun.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad -5 = \frac{x_1 + (-3)}{2}, \quad -10 = x_1 - 3, \quad x_1 = -7$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad 2 = \frac{y_1 + 1}{2}, \quad 4 = y_1 + 1, \quad y_1 = 3$$

$\Rightarrow$ D (-7, 3) olur.

Örnek : Köşelerinin koordinatları A (5, 2), B (7, 8), C(3, 10) ve D(1, 0) olan ABCD dörtgeni veriliyor. [DC] ve [BC] nin orta noktaları sıra ile E ve F olduğuna göre [EF] doğru parçasının uzunluğunu bulalım.



$$\left.\begin{aligned} x_E &= \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_E &= \frac{0+10}{2} = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E\,(2, 5)$$

$$\left.\begin{aligned} x_F &= \frac{3+7}{2} = 5 \\ y_E &= \frac{10+8}{2} = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F\,(5, 9)$$

$$|EF| = \sqrt{(5-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ birim}$$

bulunur.

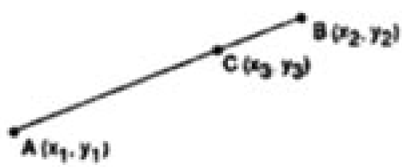
✎ [AD] ve [AB] nın orta noktaları, sırası ile, K ve P olduğuna göre siz de KP doğru parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları

Verilen bir [AB] doğru parçası üzerinde bir iç nokta C olsun. C noktasının, sıra ile A ve B noktalarına uzaklıklarının oranına, yani $\frac{|AC|}{|CB|}$ pozitif reel sayısına, C nin [AB] yi **içten bölme oranı** denir.

Yandaki şekli inceleyiniz.

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \lambda$$



ise, C noktası, [AB] yi **içten λ oranında böler** denir.

C∈ [AB] olmak üzere [AB] doğru parçasını içten λ ($\lambda \in R$) oranında bölen C noktasının koordinatları (x_3, y_3) ise |AC| ve |CB| değerleri ile

$$\boxed{x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}\ ,\quad \boxed{y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$$

bulunur.

Bu ifadelerde $\lambda = 1$ alınırsa, (x_3, y_3) noktaları [AB] nin orta noktası olur ve

$$x_3 = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1 + 1} \qquad y_3 = \frac{y_1 + 1 \cdot y_2}{1 + 1}$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

bulunur.

Örnek : A (1, 4) ve B (-6, 11) noktaları veriliyor. [AB] doğru parçasını içten $\frac{3}{4}$ oranında bölen K (x_3, y_3) noktasının koordinatlarını bulalım.

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + \frac{3}{4}(-6)}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4 - 18}{4}}{\frac{4 + 3}{4}}$$

$$x_3 = -2$$

$$y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + \frac{3}{4} \cdot 11}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{16 + 33}{4}}{\frac{7}{4}}$$

$$y_3 = 7$$

AB doğru parçasını $\frac{3}{4}$ oranında içten bölen nokta C (-2, 7) dir.

☐ D noktası, verilen bir AB doğrusu üzerinde ve $D \notin [AB]$ olsun. D noktasının sıra ile A ve B noktalarına, uzaklıklarının oranına, yani $\frac{|AD|}{|DB|} = \mu$ pozitif reel sayısına, D noktasının [AB] yi **dıştan bölme oranı** denir.

Yandaki şekli inceleyiniz.

AB doğrusu üzerinde ve [AB] sını dıştan bölen D noktasının koordinatları, |AD| ve |DB| nin değerleri yardımı ile

$$\boxed{x_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}} \quad , \quad \boxed{y_4 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}}$$

olarak bulunur.

Örnek : A (-5, 1), B (4, -2), D ∈ AB ve D ∉ [AB] veriliyor. [AB] yi dıştan $\frac{1}{4}$ oranında bölen D noktasının koordinatlarını bulalım ve çizimini de yapalım.

$\frac{|AD|}{|DB|} = \mu = \frac{1}{4}$ dur. D (x_4 , y_4) alalım.

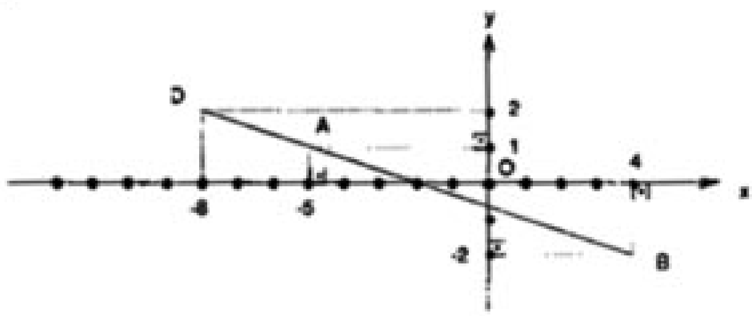
$$x_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu} = \frac{-5 - \frac{1}{\cancel{4}} . \cancel{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-5 - 1}{\frac{3}{4}}$$

$$x_4 = -8$$

$$y_4 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu} = \frac{1 - \frac{1}{4} . (-2)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$y_4 = 2$$

D (-8, 2) olur.



A (4, -2), B (-1 3) noktaları veriliyor. C ∈ [AB], D ∈ AB ve D ∉ [AB] dir. AB doğru parçasını içten ve dıştan, $\frac{2}{3}$ oranında bölen C ve D noktalarının koordinatlarını bulalım ve analitik düzlemde çizerek gösterelim.

$$C_{x_3} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + \frac{2}{3} . (-1)}{1 + \frac{2}{3}} = 2$$

$$C_{y_3} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + \frac{2}{\cancel{3}} . \cancel{3}}{\frac{5}{3}} = 0$$

C (2, 0) olur.

$$D_{x_4} = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu} \qquad D_{y_4} = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}$$ bağıntılarından

D (14, -12) bulunur.

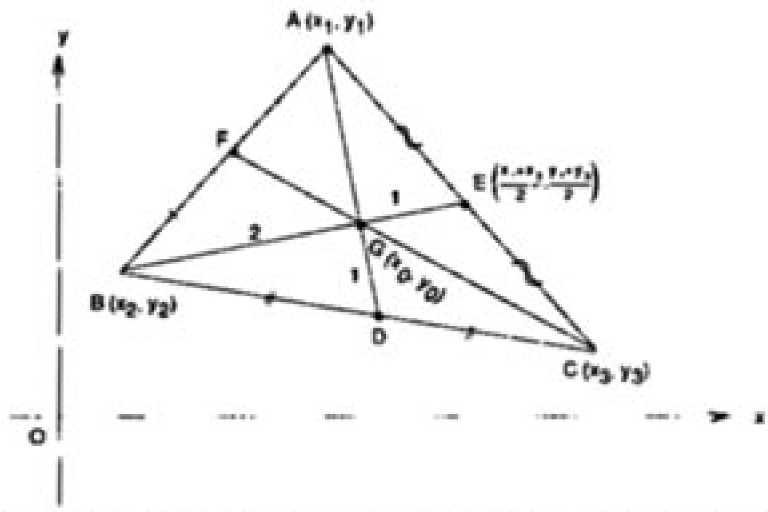
✎ Siz de analitik düzlemde A, B, C ve D noktalarını gösteriniz.

✎ Siz de uç noktaları A (-3, -4), B (9, 2) olan AB doğru parçasını içten ve dıştan 5 oranında bölen C ve D noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Üçgenin Ağırlık Merkezi

Üçgenin ağırlık merkezi, kenarortaylarının kesim noktasıdır.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz. D, E, F noktaları oturdukları kenarların orta noktaları olduklarına dikkat edin.



Herhangi bir kenarortay için, G nin kenarın orta noktasına uzaklığı, bir birim ise, köşeye uzaklığı 2 birimdir. Yani,

$$\frac{|GE|}{|GB|} = \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{|GB|}{|GE|} = \frac{2}{1}, \quad \frac{|GD|}{|GA|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|GF|}{|GC|} = \frac{1}{2}.$$

Köşelerinin koordinatları A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ve C $(x_3\ y_3)$ olan ABC üçgeninin G (x_0, y_0) ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

[BE] doğru parçasını $\frac{|BG|}{|GE|} = \frac{2}{1}$ oranında içten bölen G noktasının koordinatları;

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda\ x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda\ y_2}{1 + \lambda}$$

bağıntılarında x_1 yerine B nin apsisini, x_2 yerine E nin apsisini, y_1 yerine B nin ordinatını, y_2 yerine E nin ordinatını, λ yerine 2 yazarsak,

$$x_2 = \frac{x_1 + \cancel{2} \cdot \frac{x_1 + x_3}{\cancel{2}}}{1 + 2} \qquad y_0 = \frac{y_2 + \cancel{2} \cdot \frac{y_1 + y_3}{\cancel{2}}}{1 + 2}$$

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}} \qquad \boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$$

bulunur.

> ***Bir üçgenin ağırlık merkezinin apsisi, köşelerin apsisleri toplamının üçte biri ve ordinatı, ordinatları toplamının üçte biridir.***

Örnek : Köşelerinin koordinatları A (0, 3), B (-1, 4) ve C (4, 5) olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulalım.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0 - 1 + 4}{3} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{3 + 4 + 5}{3}$$

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 4$$

G (1, 4) olur.

Örnek : Yandaki şekilde G (-2, ?) dir.

B noktasının apsisini bulalım.

Ağırlık merkezinin apsisi,

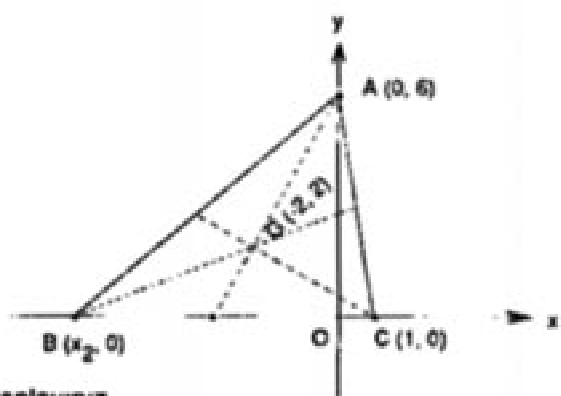
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_2}{3}$$

olduğuna göre

$$-2 = \frac{0 + x_2 + 1}{3}$$

$$-6 = x_2 + 1$$

$$x_2 = -7$$



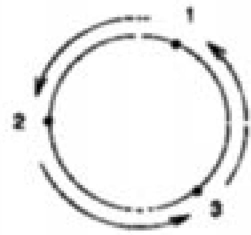
bulunur. Siz de G nin ordinatını hesaplayınız.

Üçgenin Alan Formülü

Köşelerinin koordinatları A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ve C (x_3, y_3) olan ABC üçgeninin alanını veren formül,

$$\boxed{A(ABC) = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}}$$

dir.



! Formülde apsis ve ordinatların yazılışında, şemadaki dairesel sıralamaya uyulduğuna dikkat ediniz.

A (ABC) = 0 ise A, B ve C noktaları bir üçgen oluşturmazlar ve bu noktalar **doğrusal (doğrudaş)** dır denir.

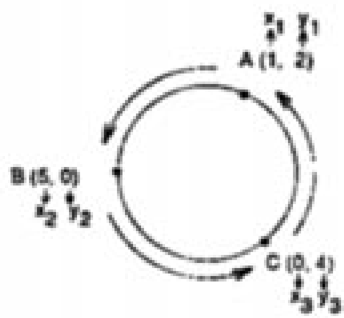
Örnek : Köşelerinin koordinatları A (1, 2), B (5, 0) ve C (0, 4) olan ABC üçgeninin alınını bulalım.

$$A(ABC) = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}$$

$$= \frac{1(0-4) + 5(4-2) + 0(2-0)}{2}$$

$$= \frac{1(-4) + 5(2) + 0.(2)}{2}$$

$$= 3 \quad \text{birim}^2$$



bulunur.

Örnek : Köşelerinin koordinatları A (0, 3), B (-3, 1) ve C (2, 0) olan ABC üçgeninin alanını bulalım.

$$A(ABC) = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}$$

$$= \frac{0(1-0) + (-3)(0-3) + 2(3-1)}{2}$$

$$= \frac{13}{2} \quad \text{birim}^2$$

bulunur.

ÖZET

Sayı doğrusu, yönlendirilmiş bir doğru ve üzerinde bir başlangıç noktası O olan doğru, bu doğru üzerinde O dan sağa doğru pozitif sayılar, sola doğru bu sayıların negatif işaretlilerinin yerleştirildiği doğrudur.

Analitik düzlem, bir O başlangıç noktası ve bu noktada birbirilerini dik kesen iki yönlendirilmiş doğru (sayı doğrusu) bir **dik çatı** adını alır. Bunlardan yatay olan doğruya **apsisler ekseni**, düşey olan doğruya **ordinatlar ekseni**, denir. Düzlemdeki bir noktanın apsisler eksenine olan uzaklığına bu noktanın **ordinatı**, ordinatlar eksenine olan uzaklığına, da **apsisi** denir. Böylece düzlemin her noktası bir sıralı gerçek sayı ikilisi ve tersine her bir reel sayı ikilisine de düzlemin bir noktası karşılık gelir. Bu sıralı gerçek sayı ikilisine, karşılık geldiği noktanın **koordinatları** denir.

İki nokta arasındaki uzaklık, $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ dir.

Orta Nokta, bir AB doğru parçasının orta noktası M ise, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $M(x_0, y_0)$ olmak üzere,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

dir.

Bir λ Oranında içten bölen nokta, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere AB doğru parçasını λ oranında içten bölen nokta $C(x_3, y_3)$ ise,

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

dır.

Bir μ oranında dıştan bölen nokta; $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere AB doğru parçasını μ oranında dıştan bölen nokta $D(x_4, y_4)$ ise,

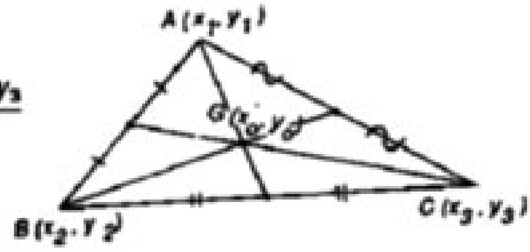
$$x_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{1 - \mu}, \quad y_4 = \frac{y_1 - \mu y_2}{1 - \mu}$$

dir.

Üçgenin ağırlık merkezi, köşe noktaları A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ve C (x_3, y_3) olan bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi, kenarortaylarının kesiştiği noktadır. Bu nokta G (x_0, y_0) ise,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

dır.



Üçgenin alanı, köşeleri A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ve C (x_3, y_3) olan ABC üçgeninin alanı $A(ABC) = \frac{1}{2} \left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right]$ dır.

ALIŞTIRMALAR I

1. Analitik düzlemde, koordinatları (?, -5) olan 2 tane nokta işaretleyiniz.
2. Analitik düzlemde, koordiatları (3, ?) olan 2 tane nokta işaretleyiniz.
3. Köşelerinin koordinatları A (5, 4), B (-1, 3) ve C (4, -2) olan ABC üçgeni veriliyor.

   a) Bu üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

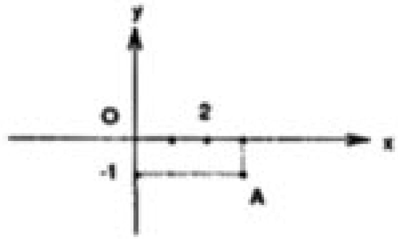
   b) $\widehat{ABC}$'ninin çevresini hesaplayınız.

   c) $\widehat{ABC}$ ninin kenarlarının orta noktaları, D, E, F olduğuna göre DEF üçgeninin çevresini bulunuz.

   ç) $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ lerinin alanlarını hesaplayınız.
4. A (-1, 5), B (7, -9) ve C (-11, 1) noktaları veriliyor. ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

DEĞERLENDİRME SORULARI I

1. Yandaki şekle göre A noktasının koordinatları hangisidir?



A) (1, 3) B) (3, 1) C) (3, -1) D) (-1, 3) E) (-3, -1)

2. A (-1, 8) ve B (5, 2) noktaları arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{6}$ B) 6 C) $36\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{2}$ E) 72

3. [AB] doğru parçası veriliyor. A (-1, -5) ve [AB] nın orta noktasının koordinatı (3, 4) olduğuna göre B noktasının koordinatları hangileridir?

A) (3, 4) B) (4, 3) C) (2, -1) D) (4, -1) E) (4, 9)

4. A (0, 2) B (2, -4) noktaları veriliyor. [AB] nın orta noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangileridir?

A) (-1, 1) B) (2, -2) C) (-2, 2) D) (1, -1) E) (1, -2)

5. A (4, 3) ve B $(x_1, -1)$ noktaları ve $|AB| = \sqrt{17}$ veriliyor. x'in çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {-3, -5} B) {3, 5} C) {-3, 5} D) {3, -5} E) $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}\}$

6. A (1, 1) , B (3, 4) ve C (2, 6) noktaları ile verilen üçgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{7}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 7 D) -7 E) $\frac{2}{7}$

7. A (2, 5) ve B (4, 8) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını $\frac{1}{4}$ oranında içten bölen noktanın koordinatları hangileridir?

A) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ B) $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ C) $\left(\frac{12}{5}, \frac{28}{5}\right)$ D) $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{28}\right)$ E) $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{5}\right)$

8. A (-3, 7) ve B (1, 3) noktaları veriliyor. [AB] doğru parçasını dıştan $\frac{1}{3}$ oranında bölen noktanın ordinatı hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Köşelerinin koordinatları A (-2, 1), B (3, 2), C (4, 4) ve D (m, 3) olan paralelkenar veriliyor. Buna göre 9, 10 ve 11 ci soruları cevaplandırınız.

9. m aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

10. [BC] nin orta noktası ile A noktası arasındaki uzaklık hangisidir?

A) $\frac{137}{4}$ B) $\frac{137}{16}$ C) $\frac{\sqrt{137}}{4}$

D) $\sqrt{\frac{137}{4}}$ E) $\frac{11}{4}$

11. AC köşegeninin uzunluğu hangisidir?

A) $3\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{45}$

D) $9\sqrt{45}$ E) 45

12. Köşelerinin koordinatları A (4, 2), B (7, 4) ve C (3, m) olan üçgenin alanı 4 birim olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

13. Köşelerinin koordinatları A (1, 3), B (2, 0) ve C (0, 3) olan ABC üçgenin ağırlık merkezi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, 1) B) (0, 1) C) (2, 3)

D) (-1, 1) E) (1, 2)

14. A (2, 0), B (0, 3), C (3,-6) köşeleri ile verilen ABC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

15. A (-2, 1), B (0, k), C(3, -1) noktalarının doğrusal olması için k ne olmalıdır?

A) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ B) 1 C) 2

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{10}{4}$

16. A (7, -3) ve B (-1, 12) noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 13 B) 21 C) 16 D) 17 E) 12

17. A (0, -1) ve B (8, -7) noktaları veriliyor. [AB] nın orta noktasının koordinatları R (-2a, 4b) olduğuna göre (a, b) ikilisi hangileridir?

A) (-1, -2) B) (1, 2) C) (-2, 1)

D) (2, -1) E) (-2, -1)

18. Köşelerinin koordinatları A (1, 6), B (1, 2) ve C (2, 7) olan üçgenin alanı hangisidir?

A) $4\sqrt{26}$ B) $3\sqrt{26}$ C) $2\sqrt{26}$

D) $\sqrt{26}$ E) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

19. A (-1, 2) , B (7, 10) dur. AB doğru parçasını içten $\frac{1}{3}$ oranında bölen noktanın koordinatları hangileridir?

A) (4, 1) B) (1, 0) C) (1, -4)

D) (1, 4) E) (0, 4)

20. Köşelerinin koordinatları A (n, 3), B (4, -2) ve C (6, k) dır. Bu üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları $\left(3, \frac{5}{3}\right)$ olduğuna göre (k, n) ikilisi hangisidir?

A) (4, -1) B) (-4, 1) C) (4, 1)

D) (1, 4) E) (-1, 4)

KAYNAKÇA

1. Analitik geometri adını taşıyan kitaplar
2. Liseler için Analitik geometri I. M.E.B. yayınları. 1992 ve sonrası
3. Liseler için matematik I. M.E.B. yayınları.
4. Ortaokul II ve III. sınıf matematik (ilköğretim 7-8 sınıf matematik) M.E.B. yayınları. 1991 ve sonrası.